One, Two, Three

题目大意

给定值域为 $\{1,2,3\}$ 的序列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$。你需要从中选出尽量多不交的长为 3 的子序列 $1,2,3$ 或者 $3,2,1$，并构造方案。

数据范围

$1\le n\le 600,000$。

解题过程

本题有两种截然不同的做法，下面主要讲述官方题解的做法。

考虑如何判断能否划分出 a 个子序列 $1,2,3$ 和 b 个子序列 $3,2,1$，通过简单调整不难说明所有 $1,2,3$ 一定使用了最靠前的 a 个 1 和最靠后的 a 个 3，同理 $3,2,1$ 使用了最靠前的 b 个 3 和最靠后的 b 个 1 。进一步观察可以发现，若两组 $1,2,3$ 使用的 $1,3$ 顺序关系形如 1133，那么将其调整为 1133 一定是不劣的。如此可知，最终的匹配关系一定形如从前往后第一个 1 与第一个 3 一组，第二个 1 与第二个 3 一组，……，一直到最后一个 1 与最后一个 3 一组，对于 $3,2,1$ 的匹配自然同理。因此，如果能在确定出每个 $1-3$ 或者 $3-1$ 的区间内匹配一个 2，就说明确实可以划分出这样一些子序列。

注意到，最后的问题是一个经典的区间与点匹配的问题，我们使用 Hall 定理来解决它。对于这一类问题，可以通过反证说明，使用 Hall 定理时只需考虑一段区间 $[l,r]$。记 $[l,r]$ 内的 $1-3$ 或者 $3-1$ 区间数为 $f(l,r)$，记 $c(x,i)$ 表示区间 $[1,i)$ 内数字 x 的出现次数，则每一对 $1,3$ 或 $3,1$ 都可以匹配上当且仅当 $\forall 0\le l\le r\le n$，均有 $f(l,r)\le c(2,r)-c(2,l)$。

将 $f(l,r)$ 中 $1-3$ 区间和 $3-1$ 区间的贡献分别记为 $g(l,r),h(l,r)$。考察 $g(l,r)$ 与 a 的关系，可以发现实际上有 $g(l,r)=\max(a-c(1,l)-(c(3,n)-c(3,r)),0)$；同理 $h(l,r)=\max(b-c(3,l)-(c(1,n)-c(1,r)),0)$。于是我们的要求即为

$$\begin{aligned}&f(l,r)=g(l,r)+h(l,r)\\&=\max(a-c(1,l)-(c(3,n)-c(3,r)),0)+\max(b-c(3,l)-(c(1,n)-c(1,r)),0)\\&\le c(2,r)-c(2,l)\end{aligned}$$

将其中的所有 $\max(\cdots,0)$ 拆开，可以得到三个分别关于 $a,b,a+b$ 上界的不等式。根据上面的讨论，这些即为全部的约束，因此直接 $\mathcal{O}(n)$ 计算不等式右侧的值即可。构造方案可以使用贪心来解决上面那个区间与点的匹配问题，总复杂度 $\mathcal{O}(n)$。

另外一个做法我还不会证明其正确性，因此这里不过多展开。这一做法的大致思路是基于对多种情况优劣讨论的反悔贪心，并在贪心过程中动态维护构造，总复杂度同样为 $\mathcal{O}(n)$。具体过程可以参考我的代码实现。感谢李青阳同学发现这一做法并将其分享给我。

参考资料

本场比赛的题解。