《Final Exam》解题报告

重庆市南开（融侨）中学 何宇翔

目 录

1 题目链接

https://qoj.ac/contest/532/problem/887

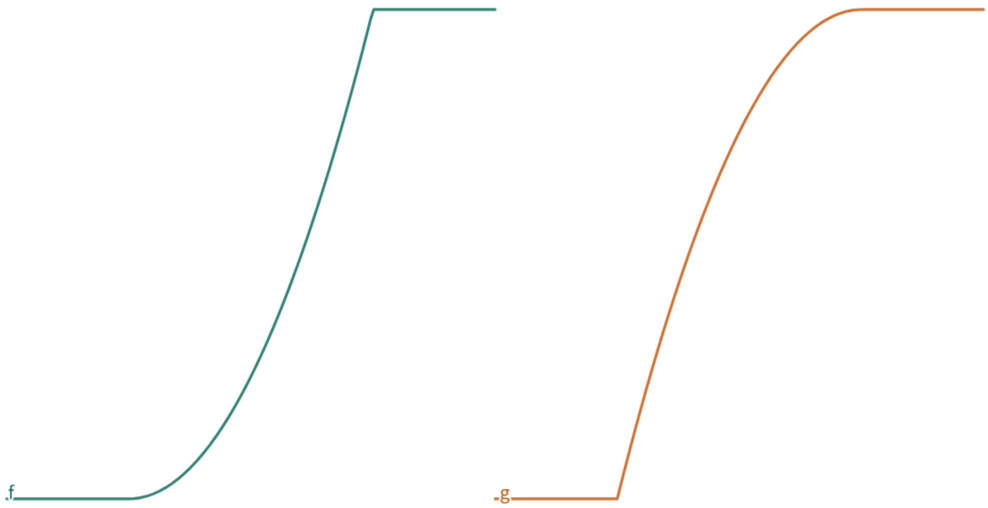
2 题目描述

给定 n 个函数，第 i 个函数为 $f_i(x) = \max(0, \min(a_i x^2 + b_i x + c_i, d_i))$。需分配 n 个实数变量 x_i，满足 $x_i \geq 0, \sum x_i \leq M$。最大化 $\sum f_i(x_i)$。

$1 \leq n \leq 100000, 0 < M \leq 10^8, |a_i| \leq 10, |b_i| \leq 5000, 0 \leq c_i, d_i \leq 5000$。保证不超过 18 个函数 $a_i > 0$。

2.1 步骤一

首先对函数进行处理，做前缀最大值，处理完后根据 a_i 的符号，函数可分为两类：$a_i \leq 0$ 或 $a_i > 0$。均可划分为三段，仅中间段斜率为非零。若 $a_i \neq 0$ 中间段为曲线。



设两个折点的 x 坐标为 l_i, r_i，则 x_i 仅需在 $\{0\} \cup (l_i, r_i]$ 取值。

先考虑所有 $a_i \le 0$ 的情况。此类函数在 $(l_i, r_i]$ 内变化率递减。目标是求出答案函数 $g(x)$ 表示 $M = x$ 时的答案。$g(x)$ 是 $O(n)$ 段的分段二次函数。

最终解中，对于所有满足 $l_i < x_i < r_i$ 的变量 x_i，$f_i'(x_i)$ 一定相同，否则可以调整使得更优，设这个值为 k。据此可反推出答案函数。

对于每个 f_i，计算 $L_i = f_i'(r_i - \epsilon)$，$R_i = f_i'(l_i + \epsilon)$ 作为 k 的可行区间，ϵ 为无穷小量。$k > R_i$ 则 $x_i = 0$，$k < L_i$ 则 $x_i = r_i$，$k \in [L_i, R_i]$ 则 x_i 关于 k 是一次函数。将区间端点排序，相邻端点间的 k 对应的 $\sum x$ 为一次函数，可以直接算出这一段 $M = \sum x$ 的取值范围，$g(x)$ 在这一范围内为二次函数，可以直接求得。

注意 $a_i = 0$ 的函数会使 $k = L_i = R_i$ 这一个点上，对应一段 M 的区间，需特殊处理。

求得 $g(x)$ 后，仅需处理 $a_i > 0$ 的函数。

2.2 步骤二

设 $t \le 18$ 个的函数满足 $a_i > 0$。目标是求出答案函数 $h(x)$ 表示 $M = x$ 时的答案。

类似于之前的分析，此类函数在 $(l_i, r_i]$ 内变化率递增，若满足 $l_i < x_i < r_i$ 的变量超过 1 个，则一定可以调整使得更优。故只会有一个变量在 (l_i, r_i) 之间，其余变量取值仅为 0 或 r_i。共有 $2^{t-1}t$ 种情形，每种对应一个定义在区间上的二次函数。

$h(x)$ 即为这些新函数取 max。但无法直接求出 $h(x)$，因为一个函数作为最大值的位置可能是多个分开的区间。根本原因是每个函数的二次系数不同。若所有函数二次系数都相同，那么任意两个函数交点至多有一个，于是每个函数作为最大值的位置就是一个区间。

观察每个新函数的二次系数，发现就是那个变量在 (l_i, r_i) 之间的 a_i。因此只会有 t 种不同的二次系数，每种有 2^{t-1} 个。我们可以对此分组，对同组 a_i 相同的函数取 max 求出 $h_i(x)$。

具体地，可以用分治与归并解决。归并两个分段二次函数时，取出分别最靠左的二次函数，算出交点，将交点前的值更大的二次函数加入归并的结果并从原分段函数中删除，重复执行即可。分治执行归并，时间复杂度 $O(2^t t)$。

得到 $h_i(x)$ 后，我们仍无法合并它们算出 $h(x)$，但也无需算出，目前已经只有 t 个分段函数了，将其分别与 $g(x)$ 计算答案即可。

对于所有 i 计算 $g(M - x) + h_i(x)$ 在 $[0, M]$ 内的最大值。这也是分段二次函数，每段算最值并求 max 即可。这里 $h_i(x)$ 不超过 2^t 段，$g(x)$ 不超过 $2n$ 段，所以 $g(M - x) + h_i(x)$ 不超过 $2n + 2^t$ 段。

时间复杂度为，第一部分需要排序 $O(n \log n)$，第二部分做 t 次分治 $O(2^t t^2)$，求答案 $O(tn + 2^t t)$。可以通过。