《Grammy Sorting》解题报告

重庆市南开（融侨）中学 何宇翔

目 录

1 题目链接 **5**

2 题目描述 **5**

3 解题过程 **5**

3.1 步骤一 5

3.1.1 双极定向 5

3.1.2 算法 1 6

3.2 步骤二 6

3.2.1 算法 2.1 6

3.2.2 算法 2.2 7

3.2.3 算法 2.3 7

1 题目链接

https://qoj.ac/contest/1009/problem/4805

2 题目描述

给定 n 个点 m 条边的无向连通图，编号为 i 的点上有初始数 P_i，P 是一个排列。指定特殊点 A, B。

每次操作可以选择一条从 A 点出发的简单路径，并将路径上的点上的数循环移位。(将 A 点的数放到路径终点，其他数沿路径向 A 点移动一步)。

你需要用不超过 $K = 10^4$ 步满足如下条件：对于任意点 x，存在一条路径从 A 经过 x 到 B 且路径上的数单调递增。

$n \le 10^3, m \le 2 \times 10^3$。

3 解题过程

可以先构造出一种合法的排列，再用操作达到这个排列即可。于是解法分为两个独立的步骤。

3.1 步骤一

需要构造一种合法排列 P 满足任意点 x 都存在一条路径从 A 经过 x 到 B 且路径上的数字单调递增。

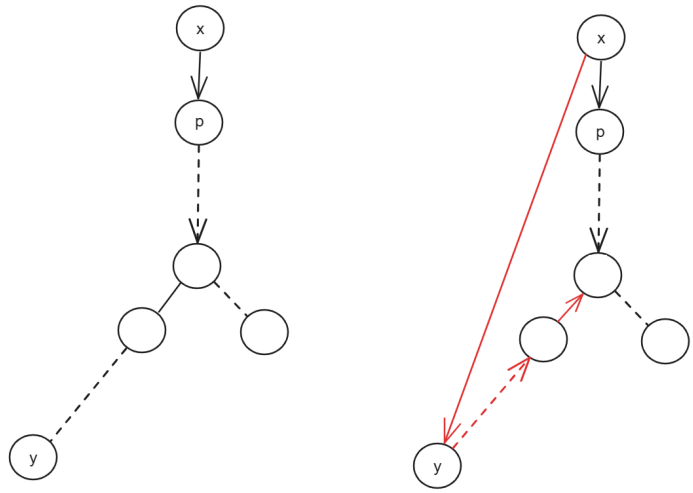
3.1.1 双极定向

考虑在操作完的图上给边定向：从数小的点指向数大的点，则图形成 DAG。而一个 DAG 可以通过拓扑排序得到合法排列。所以问题转化为给边定向形成 DAG 使得 A 为唯一的没有入边的点，B 为唯一的没有出边的点。

这是经典的双极定向问题 [1]。问题有解当且仅当加入边 $A - B$ 后原图点双连通。关于双极定向与耳分解的结论这里不再赘述，读者可以自行查阅资料。接下来给出一种定向的做法。

3.1.2 算法 1

我们找出一颗以 A 为根的 DFS 生成树，并将 B 到 A 路径定向。当有一条树边 $x-p$ 定向了，若有一条 $x-y$ 的返祖边，且 y 在 p 子树内，则可以将 $x-y$ 定向为 $x-p$ 的方向，从 y 开始向上的极长的未定向边都定向为 $x-p$ 的反方向。具体实现方法很多。



3.2 步骤二

最初每个点上有数 P_i，P 为一个排列。每次操作可以选择一条从 A 点出发的简单路径，并将路径上的点上的数循环移位。(将 A 点的数放到路径终点，其他数沿路径向 A 点移动一步)。要求每个点上的数都为指定的数，且操作次数不超过 K 次。[1]

3.2.1 算法 2.1

如果能解决树的情况，图的情况只需要找出一棵生成树即可解决。接下来只讨论图为一颗树。

先考虑树为一条链且 A 为端点。操作即为每次将链顶的数插入链中任意位置，要求将链排序。直接插入排序即可解决：第 i 次操作前满足链尾 i 个数有序，操作时将链顶插到链尾 i 个数里，操作后满足链尾 $i+1$ 个数有序，执行 $n-1$ 次即可排序。

[1] 相同的题目

3.2.2 算法 2.2

再考虑树只在 A 点分叉的情况，即从 A 点挂了若干条链。

每次操作将 A 点上的数插入应该在的链中，链内依然按照之前的方法使链尾有序。唯一的特殊情况，如果 A 点上的数就是 A 点要求的数，不属于任何链，且此时还未达成要求，就不能沿用之前的方法处理。

可以直接找到任意一条未排序完的链，插入到链尾排序好的前一个位置。这样，当该数再次回到 A 就意味着这条链已经排序好了。那么最坏情况下只会遇到链的个数次特殊情况。总步数不超过 $2n$。

3.2.3 算法 2.3

算法 2.2 使得我们能够解决互相不影响的若干条链的情况，互不影响指的是每条链链顶到根不会经过其他链的节点。而一棵树无法直接被拆成这样的结构。因为步数充足，考虑执行多轮。

一轮操作，如果树的形态不为一条链，那么就用类似算法 2.2 的方法。首先找出这一轮操作的链：对于每个叶子，向上找到第一个分叉位置，形成一条链（不含分叉点）。不难发现这些链互不影响。我们尝试完成这些链的要求。

我们记录下每个点上的数是否在 A 点被操作过。如果 A 点的数属于某条链，就插入到链中排好；否则，找到最深的一个位置使得该点上的数没有被操作过，插入到那里即可。这个位置一定可以找到，因为若所有应在链上的数都被操作了，那就一定排好了。

这样做，一个不属于链的数可能插入某位置后再向上被顶了若干步，又回到 A 点，但若遇到这种情况，就必须有至少一个属于链中的数被操作，于是多执行的次数不超过链中总点数。

用这样的方法每轮就可以将选择的链排序，这些链都在树的底部，可以将其删去。这样最多不超过 $\log_2 n$ 轮就能结束，而多执行的次数总和不超过 n。所以总次数不超过 $n(1+\log_2 n)$。但轮数和每轮的大小不可能都卡到上界，所以最终的次数远远小于 K。

参考文献

[1] 万成章. 综述图论中连通性及相关问题的一些处理方法. 2023 年信息学奥林匹克中国国家集训队论文集, 2023.