《The Pool》解题报告

重庆市南开（融侨）中学 何宇翔

目 录

1 题目链接 **13**

2 题目描述 **13**

3 解题过程 **14**

3.1 高斯整数 14

3.2 质数分解 14

3.3 合数分解 15

3.4 答案计算 15

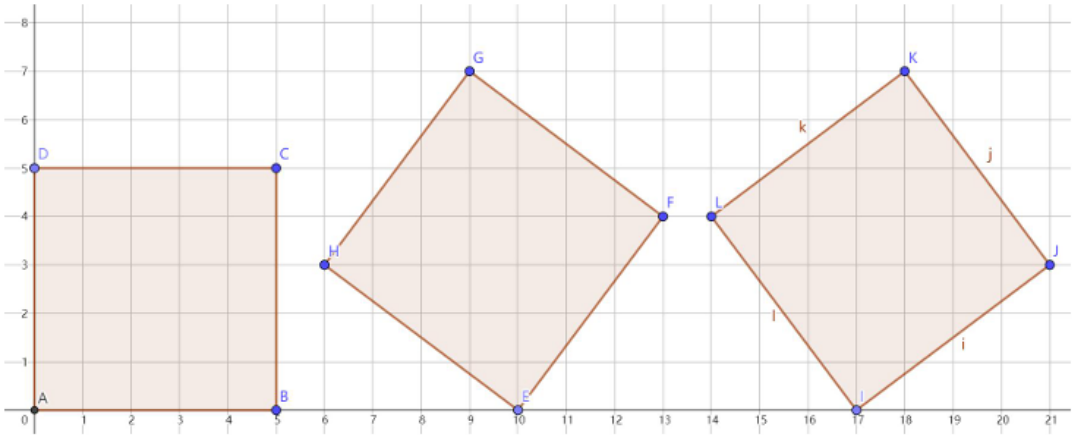
1 题目链接

https://qoj.ac/contest/1009/problem/4801

2 题目描述

将 $W \times H$ 的矩形放在网格图上，四个顶点必须落在格点上，若两种放置方法可以通过平移而重合则只算一种情况，问所有情况中，完全被矩形包含的 1×1 矩形的个数总和，对 998244353 取模。询问 T 次。

$H, W \le 10^{18}, T \le 10^4$ ，$\max(H, W) > 10^9$ 的询问不超过 10 组。



3 解题过程

直接求解较为困难，但似乎满足 $a^2+b^2=H^2$ 的 (a,b) 比较少，考虑将其全部找出。

3.1 高斯整数

设 $n=H^2$。就是要解如下方程 $a^2+b^2=n$。在实数范围内做都不好处理，考虑在高斯整数意义下解决。

高斯整数就是形如 $a+bi$ 的复数，其中 $a,b\in\mathbb{Z}$。高斯整数的加、减、乘运算是封闭的，而且还可以带余除法和求 gcd。

对于高斯整数 $\alpha=a+bi$ 记 $N(\alpha)=a^2+b^2$ 为 α 的范数。本题就是求范数为 n 的高斯整数的 $(|a|,|b|)$。简单推导得 $N(a)\times N(b)=N(a\cdot b)$。

若 $\epsilon\in\{1,-1,i,-i\}$ 为单位，高斯整数 α,β 满足 $\alpha\cdot\epsilon=\beta$ 则称 α,β 相伴。显然相伴的高斯整数的范数相同，而无序对 $(|a|,|b|)$ 也相同，所以相伴的只需要计算一个即可。

若一个高斯整数不为单位且只能被单位和它的相伴整除，则称它为高斯素数。高斯整数同样有唯一分解定理，可以分解为若干高斯素数乘积。

对于任意高斯整数 α,β，且 $\beta\neq 0$，存在高斯整数 γ,λ 使得

$$\alpha=\gamma\beta+\lambda,N(\lambda)<N(\beta)$$

设复数 $a+bi=\frac{\alpha}{\beta}(a,b\in\mathbb{Q})$，取整数 c,d 满足 $|a-c|\leq 0.5\ |b-d|\leq 0.5$。取 $\gamma=c+di,\lambda=\alpha-\gamma\beta$，一定合法。然后就可以辗转相除求高斯整数意义下的 gcd 了。

关于高斯整数更多结论和推导，读者可以自行查阅资料。[1]

3.2 质数分解

现在考虑 n 为质数的情况。

若 $n=2$，分解得 $n=(1+i)(1-i)$。而两者相伴，只有一组解 $(1,1)$。

若 $n=4k+3$，无解。因为任意平方数 $x^2\equiv 0 \text{ or } 1 \pmod 4$，所以 a^2+b^2 不可能为 $4k+3$。

若 $n=4k+1$，有唯一分解 $a\cdot b=n$。由于有唯一分解定理，只需要再说明分解出的两个数不能继续分解即可。若 a 可以继续分解成 $c\cdot d$，则 $N(c)\cdot N(d)=N(a)$ 为质数，则 c,d 中有单位，矛盾。可知 a,b 为共轭高斯素数。我们可以通过如下方法来找到这组解：取 $t^2+1\equiv 0 \pmod n$。则 $t+i,t-i$ 分别为 a,b 的倍数，让 $a=\gcd(n,t+i)$ 即可。t 可以通过二次剩余来找，或者随机一个 x 再让 $t=x^{\frac{n-1}{4}}$，根据费马小定理 $t^4\equiv 1 \pmod n$，此时有一半概率满足 $t^2+1\equiv 0 \pmod n$。

3.3 合数分解

先将 n 分解质因数。依次考虑每个质因数为最终的高斯整数提供的因式。设现在考虑到了 p，次数为 r。

若 $p = 2$，可以提供 $(1+i)^c(1-i)^{r-c}$，但 c 无论是什么，将相伴的数去重后只有一种。

若 $p = 4k+3$，则 r 必为偶数否则无解，且只能有 $p^{\frac{r}{2}}$ 一种情况。

若 $p = 4k+1$，设 $p = (a+bi)(a-bi)$。可以则提供 $(a+bi)^c(a-bi)^{r-c}$ 共 $c+1$ 种不同的情况。

将所有质因数提供的因式相乘即可得到一组合法解。我们可知，一个正整数能被表示为 a^2+b^2 当且仅当它的 $4k+3$ 型质因子次数都为偶数。而一个有解的数的解的个数为：$4k+1$ 型质因数次数的乘积。

这里可以通过 dp 等方法来计算一个 10^{18} 以内的数，它的平方有几组解。求得解数不超过 10^6 ，而 10^9 以内最多有约 10^3 个，完全可以枚举。注意分解质因数要用 pollard-rho 算法[1]，这里不再细说。

3.4 答案计算

回到原问题，得到 $a^2+b^2 = H^2$ 后，将矩形摆到平面上。

设 $A(0,0), B(a,b), C(a+c,b+d), D(c,d)$，$ABCD$ 形成矩形，c,d 可以通过 a,b,W 解出。要计算完全被矩形包含的小正方形数量。

可以直接用类欧计算形如 $\sum\lfloor\frac{qi}{p}\rfloor$ 的式子。

也可以直接计算，发现被长为 H 的线穿过的网格有 $h = a+b-gcd(a,b)$ 个，被长为 W 的线穿过的网格有 $w = c+d-gcd(c,d)$ 个。所以在内部的小正方形数量为 $HW-(h+w)/2$。

参考文献

[1] 徐翊轩. 《整点计数》命题报告以及对高斯整数的若干研究. 2019 年信息学奥林匹克中国国家集训队论文集, 2019.

[1]pollard-rho 算法详细介绍