

1 Ring Road

1.1 题目大意

给定一颗 n 个节点以 1 为根的树，树边位于二维平面上，除了端点外互不相交。树满足以下性质：

- 这颗树的标号构成 dfs 序。
- 对于每个点，以它邻边中标号最小的点为起点，逆时针遍历所有的出边，这些点的编号应是递增的。
- 1 的度数 ≥ 2 。

考虑这颗树的所有叶子，将其按照编号排序为 $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ，并对于所有 v_i 和 $v_{i \bmod k+1}$ 连边。

所有边都带权， q 次询问 u, v 间的最短路。

1.2 数据范围

$$n \leq 10^5, q \leq 2.5 \times 10^5.$$

1.3 解题过程

考虑对树分治，维护一个递归的类似原问题的结构。

为了保证递归树的深度，先找到这颗树的重心 c 。

定理 1.1. 树可以被分为大小 $\geq \frac{n-1}{4}$ 的两部分连通块（均以 c 为根，并保证在平面上连续）。

证明.

考虑子树大小序列的前缀和中 $\leq \frac{n-1}{2}$ 的最大值。

若它 $\geq \frac{n-1}{4}$ 则定理已经成立。

若否，考虑它的后一个位置，由于子树大小 $\leq \frac{n}{2}$ ，那么后一个位置的大小 $\leq \frac{3n-1}{4} - 1$ ，故它的补集 $\geq \frac{n-1}{4}$ 。 \square

把树分为大小 $\geq \frac{n-1}{4}$ 的两部分连通块后，我们考虑两部分之间的路径。

两部分之间的必经点可以用 c 和外环上两个平面的分割线处共三个点表示，称其为界点。

在每个分治位置，对界点到其他点跑最短路，把所有询问用界点更新，若某个询问的 u, v 不在同一连通块内路径必然经过界点，可以删去，剩下询问递归即可。

并且递归下去的都是一个树加上外部环的结构（环可能有些边不存在，但是可以设为 $+\infty$ ）。

时间复杂度 $O(n \log^2 n + q \log n)$ 。

1.4 参考资料

无。