

4 Squirrel Game

4.1 题目大意

Alice 和 Bob 正在国家公园里散步，他们准备玩一个游戏。

公园里从左到右，在位置 $1, \dots, M$ 处摆放着 M 块石头。从左到右，在位置 x_1, \dots, x_N 处的石头上，有 N 只松鼠，这些松鼠位于不同的石头上，并且都面朝左。

Alice 和 Bob 轮流操作。每轮，一位玩家需要将一颗橡果放在其中一块没有松鼠的石头上。此外，橡果的右侧必须至少有一只松鼠。

放置一颗橡果后，橡果右侧松鼠中最左边的 K 只松鼠会同时开始朝橡果跑去（如果橡子右侧的松鼠少于 K 只，则所有松鼠都开始奔跑），所有松鼠以相同的速度奔跑。一旦任何一只松鼠到达橡子，所有松鼠立即停止，并把这个橡从石头上取下。如果没有有效的石头可以放置橡子，则当前轮玩家立即输掉。

Alice 先走。如果 Alice 和 Bob 都采取最优策略，请确定谁将获胜。

4.2 数据范围

$$1 \leq N \leq M \leq 10^5, 1 \leq K \leq 10, 1 \leq x_1 < \dots < x_N \leq M.$$

4.3 解题过程

考虑松鼠位置序列的差分 d_i ，每次选择位置 x 和变化量 v ， $d_x \leftarrow d_x - v, d_{x+k} \leftarrow d_{x+k} + v$ 。

定义 4.1 (阶梯 nim 游戏). 定义阶梯 *nim* 游戏为有 n 堆石子 x_i ，每次把一个位置的的石子往前移，不能移动者负。

定理 4.2 (阶梯 nim 游戏的 SG 函数). 阶梯 *nim* 游戏的 *SG* 函数与奇数位置的石子对应的普通 *nim* 游戏的 *SG* 函数相等。

证明. 注意到偶数位置的每个石子往前移时，对手都能再往前一步，而奇数位置移到 0 就不能再往前走了。

故只有奇数位置移到偶数位置的那一步是不对称的，只需要考虑这一步。 \square

回到原问题，对于 $\text{mod } k$ 相同的位置是相关的，注意到它们对应一个阶梯 *nim* 游戏，那么把 k 个 *SG* 值异或起来即可。

时间复杂度 $O(N + M)$ 。

4.4 参考资料

无。