4 QOJ 857 Social Distancing

4.1 题目大意

给定一棵 n 个点的树，和它的两个大小为 k 的独立集 A, B。

在一次操作中，可以选择一条树边 (u, v)，满足 $u \in A \land v \notin A$，并使 $A \leftarrow (A - \{u\}) \cup \{v\}$。同时，操作后 A 也必须为独立集。

询问 A 是否能在 $4n^2$ 次操作内变为 B。若能则输出方案。

4.2 数据范围

本题单个测试点内有 t 组数据。

保证 $2 \le n \le 2000$，$\sum n^2 \le 4 \times 10^7$。

4.3 解题过程

首先我们先无视 $4n^2$ 的操作次数限制，后面我们会说明，我们构造出的解一定不超过 $4n^2$ 步。

注意到，本题中操作是可逆的。因此，“A 可以通过操作变成 B” 实际上是一种等价关系，我们只需要判断 A 与 B 是否位于同一等价类内。

有一个想法是：为每个等价类找到一个代表元，并判断 A 和 B 操作成的代表元是否相同。这顺便也解决了构造方案的问题：只需要把 B 的操作顺序反转，交换每次操作的 (u, v)，并拼接在 A 的操作过程后即可。

随便为树指定一个根，并把所有点按到该根的距离从大往小排序，按这个顺序重标号。定义一个独立集的状态为一个长为 n 的 01 数组，第 i 个位置表示 i 是否在独立集内。我们定义一个等价类的代表元为，对应状态的字典序最大的独立集。

那么，为了把一个独立集操作为其所在等价类的代表元，我们需要执行如下的贪心过程：依次考虑 $i = 1, 2 \cdots, n$，尝试通过一些操作让 i 在独立集内，且不影响所有 $< i$ 的点是否在独立集内。

注意到已经考虑过的点都 “沉在底下”。严谨的说，两个未被考虑的点之间的路径不会经过已被考虑的点，并且已被考虑过的 1 不可能再向下。因此，我们可以在考虑完 i 后简单的认为 i 被 “冻结” 了，也就是不能再被操作，因为把这里面的点往上挪是完全不优的。这解决了『不影响所有 $< i$ 的点是否在独立集内』的条件。

我们把问题想象成，独立集里的每个点上有一个棋子。我们考虑，如果最终 i 上的棋子在一开始是 u 上的，那么我们就需要清空路径 $i \rightsquigarrow u$ 和它的邻域。

如果路径 $i \rightsquigarrow u$ 上有棋子，那把 u 调整为里面任意一个棋子是不劣的，因此我们只需要清空邻域。也就是，我们尽可能让这些棋子往远离 i 的方向走一步即可。

这是容易使用一次 DFS 做到的：把 i 当作树的根，那么让棋子 u 尽可能往下走一步，只和让 u 的二级后代中的棋子尽可能往下走一步有关。因此我们先递归下去挪棋子，再尝试 u 能否走到任意儿子处。

最后，我们只需要尝试找到一个棋子 u 满足其到根链和其到根链的邻域都没有棋子，然后把 u 一路向上换到 i 处即可。

分析操作次数：对于每个 i，DFS 过程最多 n 步（每个棋子只会挪一步），从 u 一路向上换也最多 n 步。因此把集合 A 变为其代表元只需要至多 $2n^2$ 步。对 A, B 各做一次，操作次数不会超过 $4n^2$，符合题目限制。

时间复杂度为 $\mathcal{O}(\sum n^2)$，可以通过。

4.4 参考资料

Petrozavodsk Camp, Day 1: Solutions