2 QOJ8085 Bulbasaur 解题报告

2.1 题面描述

给定一张 n 层的分层图，每层恰好有 k 个节点。这张图上只有相邻层之间上一层连向下一层的有向边，连边情况由输入给定。

设从第 i 层某个节点走到第 j 层某个节点的路径集合为 $S_{i,j}$，称两条路径不交当且仅当它们没有公共节点，记 $f(i,j)$ 为 $S_{i,j}$ 中最多能选出的两两不交路径数量。求 $\sum_{1\le i<j\le n} f(i,j)$。

$2 \le n \le 40000, 1 \le k \le 9$。时间限制 6s，空间限制 512MB。

2.2 题目解法

先对原图进行网络流建模，对每层进行拆点来满足点不交的限制，这样 $f(i,j)$ 就是从第 i 层入点到第 j 层出点的最大流。

考虑怎么求 $\sum_{1<j\le n} f(1,j)$，我们有以下引理：

引理 2.1. *存在一组从第 1 层开始的流满足对于每个 j，抵达第 j 层的流量都恰为 $f(1,j)$。*

证明. 为了叙述的简便性，我们直接在没有拆点的分层图上进行论证，有拆点的情况是类似的。

我们直接用网络流算法构造一个这样的流，从后往前逐步构造，每次把第 1 层视为起点层，当前的层视为终点层。

考虑网络流在残量网络上的增广过程，假设当前 $\ge m$ 的层的流量已经满足限制，我们把图超过第 $m-1$ 层的部分舍去，在残量网络上继续从第 1 层向第 $m-1$ 层增广。

根据网络流算法的正确性，可以说明在任意残量网络上，我们仍然能取到 $f(1,m-1)$ 的流量，并且网络流的反悔过程不会涉及与 T 直接连接的边，即第 $m-1$ 层的每个点的度数都不会变小，因此新的流是可以和原来的流衔接的。 □

于是，我们就有这样一个简单的做法求出 $\sum_{1<j\le n} f(1,j)$：

我们从第一层的入点开始增广，找到一条终点是某一层的出点，且层数最大的增广路，然后把到达的层编号减一加到答案里并取反路径上的边。

类似的，我们能得到下面这个求答案的做法：

先增广出第一层到后面每一层的流，然后直接删掉第一层，从第二层开始在残量网络上继续增广。以此类推直到删掉所有层。

它的正确性也可以用残量网络上的增广说明。

最后，我们来分析这个做法的复杂度。不妨设 $g(i) = \sum_{i<j\le n} f(i,j)$，那么我们每次的增广量是不超过 $k + g(i+1) - g(i)$ 的。而每增广一条长为 x 的增广路，我们最多只会遍历 kx 个点，否则最大的层数就不是 x 了。因此遍历的总点数不超过 $k\sum_{0\le i<n}(k + g(i+1) - g(i))$，也就是 $O(nk^2)$ 的。

如果暴力 bfs，那么每遍历一个点最差要枚举 k 条边，也就是 $O(nk^3)$ 的复杂度。

如果用压位优化 bfs，那么总复杂度就降为 $O(nk^2 \max(1, k/w))$，在题目的限制下就是 $O(nk^2)$ 的，可以轻松通过。