2 QOJ1875 - Nein

2.1 题面描述

给定两个正整数 k,n，请求出第 n 小的满足 $x \cdot \underbrace{999\dots9}_{k}$ 的十进制表示中不含 9 的 x。

$1 \le k \le 18, 1 \le n \le 10^{18}$

2.2 题解

设 $M = \underbrace{999\dots9}_{k}$。

直接考虑一个数乘 M 之后是否包含 9 比较困难，虽然存在这样的做法，但较为复杂。

可以联想到 $999\dots9$ 这一类数的整除特征，我们可以想到计数第 n 小的不含 9 的 M 的倍数，最后将答案除以 M。

根据整除特征，我们将数 k 位一段，设答案中包含 B 段，即一共不超过 Bk 位，直觉告诉我们 B 不会很大。我们即要求所有 B 段分别看成一个 k 位数，其和是 M 的倍数。

而对于第 n 大的要求，我们可以从高到低确定，依次枚举每一位是什么，转化为 $9 \cdot kB$ 次确定一个前缀，求满足条件的数个数的问题。

设我们还有 l 位没有确定，这个问题就可以转化为，我们要选择 $\lfloor l/k \rfloor$ 个 k 位数，以及一个 $l \bmod k$ 位数，使得这些数之和模 M 与某个 r 同余。

注意到我们最多有 B 个数，所以这些数之和只可能是 $r, r+M, r+2M, \cdots, r+(B-1)M$ 之一。枚举所有可能的和，然后使用数位 dp 从低到高计算方案数即可。令 $dp_{i,j}$ 表示确定好了所有数的最低 i 位，向上进位了 j，通过提前预处理 i 个 $0 \sim 8$ 的数和 $= j$ 的方案数，可以做到单次转移 $O(B)$，数位 dp 部分总复杂度 $O(kB^2)$。

最后的总复杂度为 $O(9kB \cdot B \cdot kB^2) = O(9k^2B^4)$，经过实际测试在题目数据范围内 $B = 20$ 即足够，并且 k 和 B 不能同时取到最大值，因此运行效率极高。