4 QOJ1884 - Mission Impossible: Grand Theft Auto

4.1 题面描述

给定一棵 n 个点的树，有一个人在某个点上，但你不知道他在哪里。每一天你可以选定一条链 $a-b$，如果人在这条链上，那么他就会被抓住，否则这个人可以选择移动到任意相邻的点上，或者保持不动（可以移动到 $a-b$ 链上）。

设树上一共有 m 个叶子，你需要在 $\lfloor m/2 \rfloor + 1$ 天内抓到这个人。

$2 \le n \le 2 \times 10^5$

4.2 题解

注意到我们覆盖所有叶子需要 $\lceil m/2 \rceil$ 次操作，所以这个界很紧。

手玩一下这个操作，可以发现我们操作一条链 $x-y$ 之后，等效于会把 x 出发的 2 度链清除，和 y 出发的 2 度链清楚，并且我们下一次操作需要继续经过向外连的位置，否则这个叶子会再被染回来。

也就是说我们有一个大致的直觉是：操作的端点大概是 dfn 序上比较接近的点。事实上，玩一玩可以发现我们如果不浪费操作的话，实际上做的事情就是按照某个 dfn 序排序所有叶子，然后按照 $(0, m), (1, m-1), (2, m-2), \cdots$ 的顺序不断选对应 dfn 的叶子。

那么考虑直接这么构造什么时候会爆：当存在一条边使得我们某个时刻选过的链遍历完了边的一个子树，然后另一个子树还没有遍历，这时候我们就会凭空多出一个叶子，我们称这种边为坏边。

我们任选一个根和一个 dfn 序，我们限制自己只使用这个 dfn 序的循环位移，设我们操作的叶子的 dfn 序依次为 $(x-1, x), (x-2, x+1), (x-3, x+2), \cdots$（下标模 m）。

对于每一条边，设它子树内的 dfn 序为 $[l, r)$，如果 $r-l$ 为偶数，那么当 $x = \frac{l+r}{2}$ 时它就会成为坏边，对于子树外同理。因此一条边最多会给两个 x 贡献一条坏边。

那么我们分 m 的奇偶性讨论：

- m 为偶数，那么缩掉二度点之后最多有 $2m-3$ 条边，而这 $2m-3$ 条边中，叶子边都不会成为坏边，所以最多有 $m-3$ 条可能成为坏边的边，因此一定存在一个 x 只会有不超过一条坏边，我们选取这个 x，然后操作到坏边的时候用额外的一次操作把新产生的叶子干掉，再继续操作。

- m 为奇数，那么每条边最多有一边的子树是偶数，因此每条边最多成为一次坏边，也就是说一定存在一个 x 只会有不超过一条坏边；

  而可以发现对于任意 x，dfn 序为 $x-(m+1)/2$ 的叶子（即“对面”的叶子）的父边一定对 x 是坏边，所以我们按照这个方式构造，最后形成的情况就是只剩 $x-(m+1)/2$ 一个叶子，用一次操作把它干掉即可。

事实上，m 为偶数也可以通过直接加一个叶子转化为奇数的情况，只不过这样不太好看）

复杂度 $O(n)$。