QOJ 8185

题意简述

给定一棵 n 个点的有根外向树，包含 $n-1$ 条有向边，每一条边有一个 $[1,n-1]$ 内的整数作为编号。

定义一个排列 $p_1,p_2,...,p_n$ 是好的，当且仅当：

- 对于 $0 \leqslant i \leqslant n-1$ ，记 G_i 表示保留所有编号 $\leqslant i$ 的边得到的图，以及 $S_i(v)=\{p_u \mid v\text{在图}G_i\text{上能到达}u\}$ ，则要求 $\forall 1 \leqslant v \leqslant n$ ，满足 $S_i(v)$ 是一个整数区间（一个集合 S 是整数区间，当且仅当存在整数 l,r ，满足 $S=\{l,l+1,...,r\}$ ）。

判定是否存在好的排列，如果存在，请输出任意一个好的排列。

$2 \leqslant n \leqslant 10^6$ 。

题解

记 $F_i(u)$ 表示 u 在 G_i 上能到达的点的集合 。

原问题可以转化为：求一个所有点的排列 b ，要求对于所有 $F_i(u)$ ，都存在 $1 \leqslant l \leqslant r \leqslant n$ 满足 $F_i(u)=\{b_l,b_{l+1},...,b_r\}$ ，即 $F_i(u)$ 是 b 的一个子段。

从 G_i 到 G_{i+1} ，每次添加一条边。对于所有连通块，动态维护一个序列，表示这个连通块对应的 b 的子段，要求满足所有 $j \leqslant i$ 的 $F_j(u)$ 是一个子段 。

假设现在加入的边是 $u \to v$ ，其中 u 所在连通块的根记为 r 。每次只能把 u 所在连通块和 v 所在连通块的序列拼接，显然把序列翻转后不影响合法性，只要对于所有拼接方案判断是否合法。

记当前要把 u 所在连通块序列的端点 x 和 v 所在连通块序列的端点 y 连接，分析：

- u 子树要求相邻，则 x 必须在 u 子树内。
- 记 x 在 u 儿子 u' 的子树内， u' 子树要求相邻，则 $u=x$ 或者 u' 最后整个子树现在已经连通。
- v 同理，即 y 必须在 v 子树内，且 $v=y$ 或 v' 最后整个子树现在已经连通。

可以直接判断，如果不管怎么翻转都无法拼接就无解。用并查集维护连通块，用链表维护答案，记录每个连通块的两个端点，即可维护。总复杂度 $O(n \log n)$ 。

参考资料

无。