

4 Curly Racetrack

4.1 题目来源

Petrozavodsk Winter 2022. Day 2. KAIST Contest + KOI TST 2021 Problem L⁴.

4.2 题目大意

你正在创建一个新的卡丁车赛道。赛道是一个 $H \times W$ 的矩形板，板上的每个单元格包含一个下图之一的瓷砖块（瓷砖块可以旋转和翻转）。

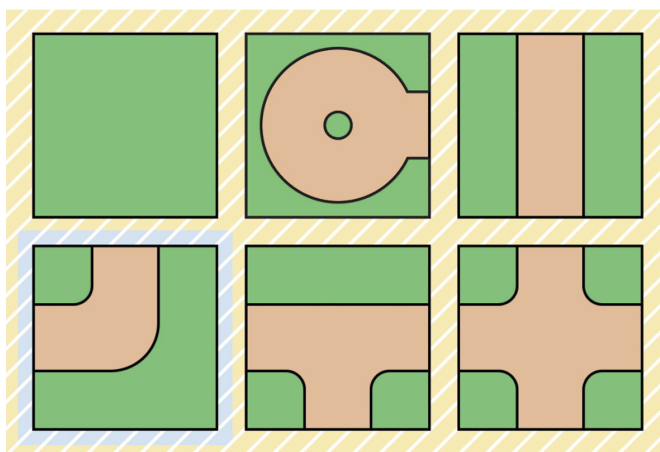


图 3: 瓷砖块形状

除第一种瓷砖块外，其他的瓷砖块都会有道路延伸到边界外。我们称第四种瓷砖为拐角瓷砖。

称一个卡丁车赛道是合法的，当且仅当每一个单元格内都包含了恰好一块瓷砖，同时从瓷砖块延伸到版外的道路应该恰好与对应相邻单元格内延伸出来的道路对接，同时不能有道路延伸到整个矩形板外。

现在，矩形板上的一些单元格上已经放置了拐角瓷砖，你要在矩形板上再放置若干个拐角瓷砖，然后将放置好的矩形板交给卡丁车管理员。你需要保证至少存在一种方式，使得管理员能在你给他的矩形板的基础上填充剩余空白单元格，使得整块矩形板变成一个合法的卡丁车赛道。

此外，初始的矩形板上还有一些限制：一些单元格在你交给管理员时不能防止拐角瓷砖；一些单元格在你交给管理员时必须防止拐角瓷砖。

⁴<https://qoj.ac/contest/820/problem/2563>

你要求出，在你交给管理员矩形板时，矩形板上最多能放置多少块拐角瓷砖。若不存在任何合法放置方式，则输出 -1。

4.3 数据范围

对于所有数据，满足 $1 \leq H, W \leq 100$ 。

4.4 解题过程

首先考虑弱化版问题：若给定放置了若干拐角瓷砖的矩形板，如何判断能否将其填充为合法的卡丁车赛道。

上述所有的六种形状的瓷砖通过旋转能得到所有 $2^4 = 16$ 种“每个边界分别是否有道路延伸”的形态。因此只需要保证对于任意相邻两个同时已经放置的拐角瓷砖之间，道路没有断头，则改局面就能够被填充为合法赛道。我们只需要将所有与已经防止瓷砖且有道路延伸的地方添加上道路即可得到一个合法的赛道。

因此，赛道的合法性只与每一条两边都已放置瓷砖的边界有关，这启发我们将横向和竖向独立考虑。

对于一个横行，若要连续放置拐角瓷砖，则方向必然为左右交替，出现端头的情况是相邻两个都放置了且左右方向相同。考虑将所有奇数位置的左右方向反转，则此时的条件变为任意两个相邻同时放置的拐角瓷砖方向必须相同。接下来所有的“方向”均表示将奇数位置反转后的方向。

我们希望所有位置尽可能放入拐角瓷砖，因此需要找出所有必须不能放置拐角瓷砖的限制。

对于每一行，找出所有已经确定方向的瓷砖。对于相邻块确定方向的瓷砖，设其位置分别为 x, y ，分类讨论：

- 若两块瓷砖的方向相同，则对于中间没有限制。
- 否则，若 $[x + 1, y - 1]$ 区间内有“限制不能防止拐角瓷砖”的单元格，则可以通过该单元格调整方向。
- 否则，若 $[x + 1, y - 1]$ 区间内没有“没有限制”的单元格，则必然无法调整方向，无解。
- 否则，这段区间内的所有“没有限制”的单元格中至少需要一个单元格不放置拐角瓷砖。

对于竖列，与横行同理。至此问题被转化为，有若干如下限制：

- 对于某一横行的某段区间，至少得有一个单元格不放置拐角瓷砖。
- 对于某一竖列的某段区间，至少得有一个单元格不放置拐角瓷砖。

求最少有几个单元格不放置拐角瓷砖。

将所有的横行限制看成左部点，将所有的竖列限制堪称右部点，构建一张二分图。对于每个“没有限制”的单元格，若其同时被一个横行限制和一个竖列限制覆盖，则在这两个限制所对应的节点之间连边。求出这张二分图的最大匹配，将所有匹配边所代表的单元格设定为不放置，再将所有未被匹配到的点所对应限制区间内任选一个节点设定为不放置即可。

复杂度瓶颈在于求解一次 $O(HW)$ 个点， $O(HW)$ 条边的二分图匹配，使用 Dinic 算法即可做到 $O((HW)^{1.5})$ 。

4.5 参考资料

无。