

1 Lazy Judge (QOJ1815)

1.1 题目大意

本题为交互题。

给定正整数 n 表示排列长度，你需要虚构排列 p ，接下来交互库会在线地进行若干次询问，询问格式如下：

1. ? 1 x y z: 交互库询问 p_x, p_y, p_z 三个位置的中位数。
2. ? 2 x y: 交互库询问是否有 $p_x < p_y$ 。
3. ? 3 x y: 交互库询问 $\min(p_x, p_y)$ 。

交互库可以随时结束询问，接下来你需要构造两种长度为 n 的排列，使得排列符合上述限制。

设 q_1, q_2, q_3 分别为上述三种询问的询问次数， $c = 2n - 2q_1 - 2q_2 - q_3$ ，你需要使得你构造的两个排列中对应位置不同的位置数不大于 $\lceil c/2 \rceil$ 。

时间限制 4s，空间限制 512MB。

[题目链接](#)

1.2 数据范围

对于所有数据

- $4 \leq n \leq 50\,000$;
- 对于所有一询问， x, y, z 两两不同;
- 对于所有二询问和三询问， $x \neq y$;
- $c \geq 2$ 。

1.3 使用算法

构造

1.4 解题过程

我们不妨将排列 a 中不确定的位置设为 ∞ 。

我们尝试构造一种通用的数据结构描述排列的限制。

定义五元组 (x, y, z, p, q) ，其中 x, y, z 两两不同， $p < q \neq \infty$ ，表示限制 a_x, a_y, a_z 三个元素组成的集合等于 p, q, ∞ 三个元素组成的集合。

定义三元组 (x, y, p) ，其中 $x \neq y, p \neq \infty$ ，表示限制 a_x, a_y 两个元素组成的集合等于 p, ∞ 两个元素组成的集合。

我们统称上述两种多元组为**波动**。

为了方便，我们下面将会假设排列中任意一个元素 a_x 至多存在于一个波动中，并且当 $a_x \neq \infty$ 时，其不存在于任何一个波动。

定义五元组波动的**固定**为，选择 x, y, z 其中一个下标（设为 x' ）删去，并且选择 p, q 其中一个数（设为 p' ）删去，将剩余的两个下标和一个数组成三元组波动，将该五元组删除，并令 $a_{x'} = p'$ 。

定义三元组波动的**固定**为，选择 x, y 其中一个下标（设为 x' ），将该三元组删除，并令 $a_{x'} = p$ 。

定义排列中的元素 a_x 的**标准值**，当 $a_x \neq \infty$ ，为 a_x ，否则当 a_x 在一个波动中，为该波动的 p ，否则为 ∞ 。

我们设置变量 cur ，初始为 0，代表已经存在与排列 a 或波动中的值的个数。

接下来我们可以根据交互库所提供的询问，动态修改我们已知信息与波动结构。

当交互库进行一询问时：

- 当 x, y, z 出现在同一个波动时，假设其为 (x, y, z, p, q) ，直接输出 q ；
- 否则，当任意两个元素出现在同一个五元组波动：
 - 不妨设为 a_x 与 a_y ；
 - 找到 a_x, a_y, a_z 三个元素的标准值，按照标准值升序进行排序，将前两个元素的值固定为标准值；
 - 输出第二个元素的标准值；
- 否则，当任意两个元素出现在同一个三元组波动：
 - 不妨设为 a_x 与 a_y ，假设该三元组波动为 (x, y, p) ；
 - 如果 a_z 的标准值为 ∞ ，将 a_z 赋值为 $cur + 1$ 并使 cur 自增，否则，将 a_z 固定为其标准值；
 - 输出 $\max(p, a_z)$ ；
- 否则：
 - 找到 a_x, a_y, a_z 三个元素的标准值，按照标准值升序进行排序，不妨设顺序为 X, Y, Z ；
 - 当第一个元素的标准值为 ∞ ，新建五元组波动 $(X, Y, Z, cur + 1, cur + 2)$ ，输出 $cur + 2$ ，使 cur 自增 2；
 - 否则，当第二个元素的标准值为 ∞ ，固定第一个元素的值为标准值，新建三元组波动 $(Y, Z, cur + 1)$ ，输出 $cur + 1$ ，使 cur 自增；
 - 否则，将前两个元素的值固定为标准值，输出第二个元素的标准值。

当交互库进行二询问时：

- 当 x, y 出现在同一个波动时，固定 a_x 为其标准值，然后输出 $a_x < a_y$ ；
- 否则：
 - 找到 a_x, a_y 的标准值，按照标准值升序进行排序，不妨设顺序为 X, Y ；
 - 当第一个元素的标准值为 ∞ ，直接将 a_X 赋值为 $cur + 1$ ，使 cur 自增，并输出 $a_X < a_Y$ ；
 - 否则，将 a_X 固定为其标准值，并输出 $a_X < a_Y$ ；

当交互库进行三询问时：

- 当 x, y 出现在同一个波动时，固定 a_x 为其标准值，然后输出 a_x ；
- 否则：
 - 找到 a_x, a_y 的标准值，按照标准值升序进行排序，不妨设顺序为 X, Y ；
 - 当第一个元素的标准值为 ∞ ，新建三元组波动 $(X, Y, cur + 1)$ ，输出 $cur + 1$ ，并使 cur 自增；
 - 否则，将 a_X 固定为其标准值，并输出 a_X ；

接下来我们进行势能分析，我们定义势能 Φ 为：

- $a_i \neq \infty$ 的元素个数加上

- 五元组波动的个数加上
- 三元组波动的个数乘以 0.5。

则新建一个三元组波动的势能增加量为 0.5，建一个五元组波动的势能增加量为 1，固定一个元素的势能增加量为 0.5。

在交互库进行一询问与二询问时，该势能至多增加 1，在交互库进行三询问时，该势能至多增加 0.5。

由于询问所需要的代价大于等于势能的增量，而 $a_i \neq \infty$ 的元素个数小于等于势能的增量，因此询问所需要的代价不小于 $a_i \neq \infty$ 的元素个数。即题面中 $\lceil c/2 \rceil$ 不大于 $a_i = \infty$ 的元素个数。

接下来给出一组构造 b, c ，使得两排列对应位置不同的数量为 $a_i = \infty$ 的数量。

首先找出所有没有被排列与波动使用的数字，组成序列 f_1, f_2, \dots, f_m ，令 $f_{m+1} = f_1$ ，设置指针 t 表示我们已经使用到了 f 中的哪一个数。

对于所有 $a_i \neq \infty$ ，有 $b_i = c_i = a_i$ 。

对于所有三元组波动 (x, y, p) ，有 $b_x = p, b_y = f_t, c_x = f_{t+1}, c_y = p$ 。

对于所有五元组波动 (x, y, z, p, q) ，有 $b_x = p, b_y = q, b_z = f_t, c_x = f_{t+1}, c_y = p, c_z = q$ 。

对于所有 $a_i = \infty$ 且没有波动的元素，有 $b_x = c_t, c_x = f_{t+1}$

综上，此构造合法。

1.5 题目疑问

上述过程存在一些微小问题，当 $a_i \neq \infty$ 的元素数量恰好等于 1 时， $f_1 = f_2$ ，所生成的两个排列完全一致。

当题面中 $c = 2$ 时，我们可以构造如下 hack：

```

1 5
2 ? 1 1 2 3
3 ? 3 1 2
4 ? 1 3 4 5
5 ? 3 2 4
6 ? 2 2 5
7 !

```

这个问题比较复杂，虽然原题数据中不存在 $c = 2$ 的数据，但希望大家可以多多思考该问题的规避方法。

1.6 参考资料

Inside Story of Median Query [官方题解](#)