

3 Interesting Coloring (QOJ1812)

3.1 题目大意

给定一张 n 个点 m 条边的强连通无向图，要求进行边染色使得有公共交点的一对边异色，并且使得对于每条边 (u, v) ，删掉该条边后存在一条 u, v 间的路径，其颜色数量不超过 8。构造染色方案与路径方案。

时间限制 2 s，空间限制 512 MB。

[题目链接](#)

3.2 数据范围

对于所有数据，

- $3 \leq n \leq 5555$, $3 \leq m \leq \min(n(n-1)/2, 9999)$ 。

3.3 使用算法

构造，树链剖分

3.4 解题过程

尝试建立原图的 dfs 树，以 1 为根。由于原图为强连通图，因此所有树边均被至少一条非树边覆盖。

颜色数量不超过 8 的限制看起来就极为宽松，不妨考虑加强限制：对于所有由一条非树边与若干条树边组成的简单环，其颜色数量不超过 8。

假设非树边的颜色任取，则限制可以继续加强为：对于 dfs 树上的所有从 1 到叶子节点的链，其颜色数量不超过 7。

我们尝试按照该加强后的条件构造，可以发现如果我们先将每一个节点的所有儿子按照子树大小降序排序，然后从根节点开始贪心地从小到大分配颜色，可以证明该构造符合要求：

使用 s_u 表示 u 节点的子树大小。

考虑反证，构造一棵树使得其存在颜色数量等于 8 的链，最简单的构造是使得该链包含 $1, \dots, 8$ 所有颜色。

由于我们已经将所有儿子按照子树大小降序排序，因此，考虑最坏情况（节点 u 与父亲的边颜色为 1）：

- 如果从节点 u 开始沿着颜色为 1 或 2 的边走到儿子 v ，则 $s_v + 1 \leq s_u$ 。
- 如果从节点 u 开始沿着颜色为 3 的边走到儿子 v ，则 $2s_v + 1 \leq s_u$ 。
- 如果从节点 u 开始沿着颜色为 4 的边走到儿子 v ，则 $3s_v + 1 \leq s_u$ 。
- \vdots
- 如果从节点 u 开始沿着颜色为 8 的边走到儿子 v ，则 $7s_v + 1 \leq s_u$ 。

假设从 1 节点走到 v 节点，则 $1 \leq s_v$ ，进而可以推出 $\sum_{i=1}^7 i! = 5913 \leq s_1$ ，而 $n \leq 5555$ ，矛盾。因此对于 dfs 树上的所有从 1 到叶子节点的链，其颜色数量不超过 7。

根据上述结论，我们可以构造出如下算法：

1. 找到原图的一颗 dfs 树；
2. 每一个节点的所有儿子按照子树大小降序排序后，从根节点开始贪心地将树边染色；

3. 非树边任意染色。

3.5 参考资料

Coloring Paths [官方题解](#)