IOI 2026 集训队试题准备

> 陈翰文，QOJ 账号 pp_orange

qoj1854

题目大意

给一张 n 个点的有向图图和两个正整数 p, q，设节点编号为 $\{0, 1, \ldots n-1\}$

- 对于所有点 $i + p < n$，连边 $i \to i + p$
- 对于所有点 $i - q \geq 0$，连边 $i \to i - q$

求图上任意一个哈密顿路或报告无解。

多测， T 组测试数据。

数据范围

保证 $T \leq 10^4, p, q, \sum n \leq 10^6$。

解题过程

若 $p = 1$，我们可直接选择路径 $0, 1, \ldots, n-1$；同理，若 $q = 1$，可选择路径 $n-1, n-2, \ldots, 0$
。

而当 $g = gcd(p, q) > 1$ 时，显然不存在哈密顿路径。因为只能在 g 的倍数移动。

猜测充要条件。我们若把节点按照 $\bmod (p+q)$ 分类，看做 $(p+q)$ 个等价类，那么一个等价类的后继是唯一确定的。但是给定一个 n $[0, n)$ 的数 $\bmod (p+q)$ 剩余类大小是有结构的，容易发现只有 $n \bmod (p+q) = 1/0/-1$ 的 n 可能有解。

分别构造。先着手于最简单的情形：$n = k(p+q)$，把标号按 k 分块，每块内由 $gcd(p, q) = 1$ 易证该导出子图构成一个环。只需要再把这些环串起来即是一个构造，我们从 0 开始，在块内走完这个环，并且在最后一步可以恰好跳到下一个环的起点。对于 $n = k(p+q) + 1$ 同理，只要在最后多跳一步即可。而 $n = k(p+q) - 1$，我们调整一下第一个块的起点，调整为 $p - 1$，这样第一个块就不会经过 $p + q - 1$ 这个点。后面的块同理串起来即可。复杂度 $O(n)$。

参考资料

https://qoj.ac/contest/695/problem/1854

https://qoj.ac/download.php?type=attachments&id=695&r=1