# qoj4795

## 题目大意

给定一棵 $N$ 个顶点的**无向树**，每条边有一个**严格正整数**长度。随后将有 $M$ 辆出租车与 $M$ 名顾客出现在树上，每辆出租车和每名顾客各占据**恰好一个**顶点；同一顶点可同时停放多辆出租车、也可同时聚集多名顾客。

一款打车软件负责把顾客与出租车**一一配对**。当下规则要求：

- 顾客必须支付出租车**空驶来接**所走的路程。

而该软件**恶意贪婪**，它会选择一种配对方式，使得所有出租车**空驶总路程**达到**最大**。注意每辆出租车恰好服务一名顾客，每名顾客也恰好被一辆出租车服务。

在所有可能的 $N^{2M}$ 种出租车与顾客的分布情形中，对每种情形都按上述贪婪规则算出空驶总路程。你的任务是把这 $N^{2M}$ 个总路程**全部相加**，最后输出该和对 $10^9+7$ 取模的结果。

## 数据范围

保证 $1 \le N, M \le 2500$。

## 解题过程

首先猜测答案具有某种线性性，把计数对象直接拆到边上。对于每条边，如果设其一侧的子树中有 $a$ 个出租车，$b$ 个顾客的话，它最多被经过 $\min(a, m-b) + min(b, m-a)$ 次，这是答案的上界。这个猜测实际上是可以取到，确实存在一个构造方法可以做到这一点。我们把这个问题看做流，把出租车看成源，顾客看成汇，我们只需证我们的构造在任意一个节点都流量平衡，那自然存在一组出租车和顾客的匹配方式满足要求。我们不妨设 $x$ 这点的出租车和顾客数分别为 $(A, B)$，若 $\deg_x = k$，则设相邻的 $k$ 个子树里面的出租车和顾客的数量分别为 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_k, b_k)$，则这点的入流为 $B + \sum\limits_{i=1}^{k} \min(a_i, m-b_i)$，这点的出流为 $A + \sum\limits_{i=1}^{k} \min(b_i, m-a_i)$，下证入流-出流=0，考虑

$$
\begin{aligned}
&(B + \sum_{i=1}^{k} \min(a_i, m-b_i)) - (A + \sum_{i=1}^{k} \min(b_i, m-a_i)) \\
=&(B + \sum_{i=1}^{k} (\min(a_i+b_i, m) - b_i)) - (A + \sum_{i=1}^{k} (\min(b_i+a_i, m) - a_i)) \\
=&(B + \sum_{i=1}^{k} b_i) - (A + \sum_{i=1}^{k} a_i) \\
=&0
\end{aligned}
$$

于是对于一个里面有 $(a, b)$ 个出租车和顾客的大小为 $sz$ 的子树计算答案：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{a=0}^{m}\sum_{b=0}^{m}\binom{m}{a}\binom{m}{b} sz^{a+b}(\min(a, m-b) + \min(b, m-a)) \\
=&\sum_{a+b=0}^{2m}\sum_{0\le a,b\le m}\binom{m}{a}\binom{m}{b} sz^{a+b}(\min(a, m-b) + \min(b, m-a)) \\
=&\sum_{a+b=0}^{2m}\binom{2m}{a+b} sz^{a+b}(\min(a, m-b) + \min(b, m-a))
\end{aligned}
$$

计算复杂度被我们降低到了 $O(m)$，暴力计算，总复杂度 $O(nm)$。

## 参考资料

https://qoj.ac/contest/1025/problem/4795