qoj4786

题目大意

称一个 $N \times N$ 矩阵 A 为**平衡矩阵**，若对所有 $1 \leq i, j \leq N-1$ 均满足 $A[i][j] + A[i+1][j+1] = A[i][j+1] + A[i+1][j]$。

给定一个 $N \times N$ 矩阵 A，请构造一个同阶矩阵 B，使得

- B 是平衡矩阵；
- $B[i][j] \geq A[i][j]$ 对所有 $1 \leq i, j \leq N$ 成立；
- 并且 B 的所有元素之和**最小**。

数据范围

保证 $1 \leq N \leq 50, 0 \leq A[i][j] \leq 35\,000$。

解题过程

平衡矩阵等价于存在一组 $(f_1, f_2, \dots f_n), (g_1, g_2, \dots g_n)$，满足 $A_{i,j} = f_i + g_j$。

n 的数据范围比较迷惑，猜测是比较慢的多项式复杂度算法，综合考虑，考虑用费用流猜答案。 建立一个左右各 n 个点的二分图，在左侧的第 i 个点和右侧的第 j 个点之间连接一条长度为 $A_{i,j}$ 的边，这张图的最大匹配显然是这个问题的一个下界，因为把最大匹配所对应的 f_i, g_j 相加刚好为 $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i + \sum\limits_{i=1}^{n} g_i$。

考虑构造。如果用 KM 算法求解这个问题天然就会得到这个顶标。

但是 KM 较为冷僻，我们考虑在最大费用流上考虑这个问题。我们用 $(u, v, flow, cost)$ 描述一条费用流上 u 到 v 流量为 $flow$ 单位代价为 $cost$ 的边。我们在左部点和右部点之间连接 $(l(i), r(j), \infty, A_{i,j})$ ，S 和左部点之间连接 $(S, l(i), 1, 0)$，T 和右部点之间连接 $(r(j), T, 1, 0)$，在最后一轮费用流结束后，考察它最短路的 dis 数组。我们发现，对于选中的匹配 (i, j)，我们有 $dis(r(j)) = dis(l(i)) + A_{i,j}$（等号因为正反不等式都有），即 $A_{i,j} = dis(r(j)) - dis(l(i))$，对于其它边，我们有 $dis(r(j)) \geq dis(l(i)) + A_{i,j}$，即 $A_{i,j} \leq dis(r(j)) - dis(l(i))$，我们发现，令 $f_i = -dis(l(i)), g_j = dis(r(j))$ 直接就是一个原问题的解。于是直接构造即可。

最后复杂度为 $O(n^4)$ 或 $O(n^3)$，取决于你对稠密图上费用流的优化程度。

参考资料

https://qoj.ac/contest/1025/problem/4786