1 Hamilton Path

1.1 题目大意

给定一张 n 个点 m 条边的有向图，求 $1,\ldots,n$ 的排列 p 数量满足：$\forall 1 \le i < j \le n$，有向边 (p_i, p_j) 存在当且仅当 $j = i + 1$。

如果排列数量不超过 n，还要按字典序输出每个排列的哈希值：$\left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \times 10^{n-i}\right) \bmod (10^9 + 7)$。

1.2 数据范围

单测试点中有 T 组数据，令 $\sum n$ 为各数据 n 之和，$\sum m$ 同理。

对于所有测试点，$1 \le T \le 10^5, n \ge 1, m \ge 0, 1 \le \sum n \le 5 \times 10^5, \le \sum m \le 10^6$。

时间限制 4 秒，空间限制 512 Mib。

1.3 解题过程

一个显而易见的结论是，$\forall 1 \le i \le n$，满足 $p_1 = i$ 的合法排列最多只有一个，我们有 $O(m)$ 复杂度的算法求这个以 i 开头的合法排列，或者得知以 i 开头的合法排列不存在。对所有 i 检查一遍，可以做到 $O(nm)$。

我们考虑一个这样的过程：初始时令每个点都是一条链，若一条链的链尾有唯一一条不连向自身链上点的出边且连向另一条链的链头，合并这两条链。无法合并时，链集合有两种情况。

链集合中只有一条链。显然，这条链是一个合法排列，令其对应排列 p，这种情形下我们还有两种子情形。

有一条由链尾连向链头的边。显然，这条链加上这条边构成一个环，若只有这个环，环上每个点都是一个合法起点。考虑环外一条边 (u, v)，此时 p 上 $v \to u$ 除 v 外每个点都不再是一个合法起点，因为走到 u 时存在至少两条出边。其余所有点仍然是合法起点。合法起点的排列也是简单的，p 的一段后缀加上一段前缀。

没有由链尾连向链头的边。对于除 p_1 外其它起点，走到 p_1 一定是通过某个 p_j “跳跃”而来，令 k 为满足 (p_j, p_1) 存在的最大的 j，显然，只有 p_k 可以真正跳到 p_1，因为对于别的 p_j，如果让它跳到 p_1，p_k 必定出现在 p_1 之后，p_1 及之后是 p 的前缀，经过 p_k 包含 p_j，p_j 出现两次，矛盾。p_k 需要跳到 p_1，此时需要一个点跳到 p_{k+1}，这时 p_{k+1} 拥有和 p_1 类似的地位，类似的做下去即可，最后可以确定到唯一的起点。注意到这样做没有保证这个起点充分合法，需要暴力判一次。

链集合中有两条或更多链。对于链 A，只有 A 链尾有唯一一条不连向 A 链上点的出边时 A 链头才有可能成为合法起点，A 上其余点一定不可能成为合法起点。对于前者，若不满足，无论从哪个点出发都无法离开 A；对于后者，假定从 A_i 出发，A 链尾连向链 B 的 B_j，A_{i-1} 和 B_{j-1} 都必然

成为终点，矛盾。同样，这样的链 A 若超过两个，也会有两个终点的问题，因此，合法起点不超过两个，暴力判断即可。

时间复杂度 $O(n+m)$。

1.4 参考资料

- QOJ2210：https://qoj.ac/problem/2210