IOI 2026 集训队试题准备

曹轩鸣

大致按主观难度排序。

1 AND PLUS OR

1.1 题目大意

给定一个数组 $a_{0\sim 2^n-1}$。找到一对 (i,j) 使得 $a_i + a_j < a_{i \operatorname{and} j} + a_{i \operatorname{or} j}$，或报告无解。

1.2 数据范围

$0 \le n \le 20, 0 \le a_i \le 10^7$。3s, 1024MB。

1.3 解题过程

这个限制看起来并不能用套路的 bitmask 技巧进行优化。于是考虑能不能构造一些"基础" (i,j) 对，使得如果所有的基础对都不满足条件，那么所有的对都不满足条件。容易猜到所有最小非平凡单位即为这样的基础对，即 i 把某个 1 变成 0，某个 0 变成 1，所得到的数字作为 j，这样 $i, j, i \operatorname{and} j, i \operatorname{or} j$ 在这两位分别取完了 $10, 01, 00, 11$ 四种，符合"基本单位"的特征。

证明 即，假设所有这样的基础对 (i,j) 都有 $a_i + a_j \ge a_{i \operatorname{and} j} + a_{i \operatorname{or} j}$，要证明所有 (i,j) 同样满足此不等式。任意考虑一个 (i,j) 对，他们相同的位在 $i, j, i \operatorname{and} j, i \operatorname{or} j$ 中都相同，只有不同的位是真正核心的，所以我们不妨直接忽略其他位，只考虑这些不同的位。为方便表示，设 $[l,r)$ 表示以"第 l 位到第 $r-1$ 位都为 1，其他位都为 0 的二进制数"为下标的 a 值，则由于位之间的对称性，可以认为要证 $[0,x) + [x,n) \ge [x,x) + [0,n)$。而由基础对的不等式，可以知道 $\forall l < r, [l,r) + [l+1,r+1) \ge [l+1,r) + [l,r+1)$。根据四边形不等式的结论，这可以推出相交 $\ge$ 包含，原式得证。

所以只需枚举所有的基础对进行判断即可，复杂度 $O(2^n n^2)$。

1.4 参考资料

无