2 Great Party

2.1 题目大意

取石子游戏 有若干堆石子，两个人轮流操作，每次操作形如，操作者任意选取一堆非空的石子堆，从中取走任意非零数量的石子，并选择——将剩下的石子合并入另一堆，或保持不变。

现在给定一个长度为 n 的数组 a，有 q 次询问，每次给定一个区间，求其有多少个子区间，满足将子区间的元素作为每堆石子的石子数，该游戏先手必胜。

2.2 数据范围

$1 \le n, q \le 10^5, 1 \le a_i \le 10^6$。1s, 256MB。

2.3 解题过程

分析游戏先手必胜的充要条件。

- 首先若只有一堆显然先手必胜。
- 当只有两堆的时候，无论操作者怎么取，一定不能取完一堆石子，或者取一些后合并入另一堆，否则一定输。所以问题转化成每堆石子都预留一个固定的石子不能取走，只能在剩下的里面取，谁先无法操作谁输。这即为 $n = 2$ 时的 nim 游戏，结论为当且仅当 $(a_1 - 1) \oplus (a_2 - 1) \ne 0$，即 $a_1 \ne a_2$ 时先手必胜。
- 当有三堆的时候，操作者可以从最多的一堆中取适量的石子，并把剩下的合并入最少的一堆，使得剩下的两堆石子数相同，使另一个人必败。所以有三堆时一定先手必胜。
- 当有四堆时，同样转化成每堆石子都预留一个固定的石子不能取走，套用 nim 游戏的结论，当且仅当 $\bigoplus_{i=1}^{4} a_i \ne 0$ 时先手必胜。

于是可以感受到当奇数堆时先手必胜，偶数堆时等价于每堆石子数减一的 nim 游戏。证明与 nim 游戏的证明方法类似，这里不再赘述。

有了充要条件，数据结构部分相对容易。首先可以把所有 a_i 减一。对于一次查询，所有长度为奇数的子区间可以直接计算得到，剩下的相当于求有多少个长度为偶数的子区间异或和为 0。首先求前缀异或和 $s_i = \bigoplus_{j=1}^{i} a_j$，那么问题被转化为有多少对 $l - 1 \le i < j \le r$ 且 i, j 奇偶性相同，且 $s_i = s_j$。这可以通过简单的莫队算法实现。

2.4 参考资料

无