4 Curly Racetrack

4.1 题目大意

有一个 $n \times m$ 的地图，每个格子有六大类接口类型，分别是：无接口；向一个边界有接口；向两个相对的边界有接口；向两个相邻的边界有接口；向三个边界有接口；向四个边界都有接口。每大类里面根据旋转方向可能有若干小类。一个地图合法当且仅当对于每个缝隙，要么两侧都有指向这里的接口，要么都没有。称第四类情况（相邻的边界上有接口）为“L 形”，其中的四个小类根据放接口的情况命名为“左上”“左下”“右上”“右下”。

现在每个格子的类型都不确定。你要在一些格子中填入“L 形”，每个格子对**你的填写**有限制，分为如下七种类型限制：必须填“左上”、必须填“左下”、必须填“右上”、必须填“右下”、必须填一个“L 形”、必须留空、没有限制。除此之外，你需要确保填完之后，存在一种填充空余位置的方案使得地图合法（这里的填充不受七种限制影响，也可以填非“L 形”）。求你最多能在多少个格子中填入“L 形”，无解输出 -1。

4.2 数据范围

$1 \le n, m \le 100$。1s, 1024MB。

4.3 解题过程

容易发现，由于你填完之后剩余部分没有任何限制，且接口类型覆盖了所有可能的情况，所以只要你填的部分不直接冲突就合法。接下来考虑如果已经确定了哪些格子要填——即前四种限制的格子是固定的，剩下的每个格子都知道了最终要填还是要不填——如何判定能否不冲突。注意到“L 形”等价于在上下任选一个接口，在左右任选一个接口，所以横竖之间是完全独立的，只需要独立地考虑每一行的横向能否不冲突，以及每一列的纵向能否不冲突。行列是对称的，对于一行而言，容易说明不冲突当且仅当对于任意相邻两个完全确定的格子，要么它们奇偶性能匹配，要么中间不是全选。（左右边界外也当成确定的、没有向内接口的格子）

所以，对于横或竖向相邻两个完全确定的格子，若他们的奇偶性不匹配，就会带来一个限制：中间的一个线段不能全选；匹配则不会带来任何限制。容易说明这个种限制是充要的。现在问题转化为：有若干不交的横向线段要求里面有不选的格子、若干不交的纵向线段、若干单点不能选、若干单点必选，求最多能选多少个点。首先单点不能选的限制会直接导致包含他的横纵限制自动满足，所以把它们删除，于是单点不能选的限制被规约到了横纵线段。如果存在一个线段限制里面全是必选，则原问题无解。否则，只要给每个“存在不选”的线段随便找一个不“必选”的位置，要求它不选，最后剩下的格子全选，即为一组合法解，且不选的格子不超过横纵约束数量之和。现在答案的变数主要来自于，一个格子不选可能同时满足两个限制。

考虑建一个二分图，左部点表示所有的横限制，右部点表示所有的纵限制，每条边表示要求一个格子不选。则若一个格子非必选，且能满足一个横限制与一个纵限制，就在这两个限制之间连一条边；同样在每个点上连一个自环，因为每个限制中一定存在一个非必选点。问题转化为选择尽可能少的边覆盖所有的点。可以说明答案等于横纵限制总和减去二分图最大匹配。使用 Dinic 算法求最大匹配，复杂度为 $O(nm\sqrt{nm})$。

4.4 参考资料

无