

《Excluded Min》解题报告

杭州学军中学 孙梓航

2025 年 9 月 21 日

1 题目大意

设 S 为一个包含非负整数的多重集合。你可以对 S 进行任意多次（包括零次）以下操作：选择 x ，使得 S 中至少存在两个 x ，删除其中一个 x ，但插入一个 $(x-1)$ 或 $(x+1)$ （仅当 $(x-1)$ 为非负时才能插入）。令 $F(S)$ 表示通过这些操作可以达到的最大 mex 值。这里的 $\text{mex}(S)$ 指的是 S 中未出现的最小非负整数。

给定一个长度为 n 的数组 a 和 q 个查询 $[l, r]$ 。对于每个查询，求 $F(\{a_l, a_{l+1}, \dots, a_r\})$ 。

2 数据范围

$$n, q \leq 5 \times 10^5, 0 \leq a_i \leq 5 \times 10^5, 1 \leq l_i \leq r_i \leq n。$$

3 解题过程

贪心地进行操作，我们很容易得到答案。

把答案形式化，定义函数 $f(S, x) = |\{z \in S : z < x\}| - x$ ，则 $F(S) = \max_{f(S, x) \geq 0} x$ 。

我们发现，由于答案最终形如一个集合的最大值。因此，我们可以从大到小扫描 x ，如果某个询问在某一时刻包含 x ，那么其答案就已固定，我们可以直接将该询问删去。

我们其实想维护一个数据结构，使其能够时刻给出未被删除的询问中 $f(S, x)$ 最大的那个。

根据刚才的定义，发现：

- 若 $S_1 \subseteq S_2$ ，则 $f(S_1, x) \leq f(S_2, x)$ 。

这意味着我们只需维护那些未被其他未删除段包含的段，我们将这些段称作**活跃段**。

这时我们发现，如果我们将所有**活跃段**，按照左端点排序，那么包含某个位置的**活跃段**一定形如一段区间。

至此，一切都豁然开朗。我们使用一颗线段树来寻找删除一个活跃段后，新出现的活跃段；使用一个树状数组，来处理新出现的活跃段的 $f(S, x)$ 查询；使用另一颗线段树来维护活跃段 f 值的区间修改，以及最大值询问。

具体实现的话，后两个都比较经典，但第三种要额外找到修改区间，这个可以多维护一个 `set`。第一种可以每次查询左端点在一个区间内未被删除的询问中右端点最大的那个，这样来做到每次取出 $\Theta(\log_2 q)$ 。

时间复杂度 $\Theta((n + q)(\log_2 n + \log_2 q))$ 。

4 参考资料

Petrozavodsk Winter 2021. Day 5. Almost Retired Dandelion Contest Tutorial (en)