

#1351 Koosaga's Problem

题目大意

给定一个 n 个点 m 条边的简单连通图，求最少要删除几条边才能让图变成二分图，输出对应的删边方案数量。特别的，如果最少删边数量多于 2 条，则输出 0。

数据范围

$$3 \leq n \leq 2.5 \times 10^5, n - 1 \leq m \leq 2.5 \times 10^5.$$

保证图中没有重边和自环，且图连通。

解题思路

考虑一个相似的问题：图上每条边的边权为 1，最少把几条边的边权改为 0 才能让图变成二分图。

对于这个问题，找到一棵原图的dfs树，那么是二分图，等价于每条非树边对应的树链的长度为奇数。由定义可知必要性。充分性，考虑直接根据dfs树上的深度奇偶性给每个点黑白染色，同样可证。因此该条件是充要的。

若一条非树边和其对应的树链构成长度为奇数的环，则称其为奇边，否则称为偶边。称一条非树边经过一条树边，当且仅当这边树边在该非树边对应的树链上。将一条树边的边权改为 0 时，所有经过它的非树边的奇偶性会反转。修改非树边边权，则相当于直接反转它的奇偶性。最终目标是让所有边都变成偶边。

观察到边权修改带来的影响是相对独立的。考虑给非树边编号 $1 \sim m - n + 1$ ，第 i 条边赋权 2^i ，同时给所有它经过的树边异或上这个权值。记 S 为所有是奇边的非树边的权值异或和。那么我们相当于要找到最少的边，使得他们权值的异或和为 S 。但边权过大不容易维护，观察整个异或的过程，我们实际上只需要若干条非树边的边权异或起来为 0 的概率较低即可，因此可以给非树边随机赋权，其余操作容易用map维护。实测在 $[1, 2^{64})$ 值域内随机正确率已经极高。

回到原问题，我们声称两者的答案是相同的。删边的效果是不弱于修改边权的，而由于我们关心的是删边最少的方案，因此每条被删除的边一定被包含在至少一个奇环内。也就是说删除一条边 u, v 之后，它们仍然通过环的另一侧连通，由于是奇环，可知两者在删边后的距离是偶数，而我们只关心奇偶性，所以这等价于两者间存在一条边权为 0 的边。所以，在删边最少的方案中，删边和修改边权完全等价，直接使用修改边权的解决方法即可。

使用map维护边权，总时间复杂度 $O(n \log n)$ 。

参考资料

李羽修，Hash函数的设计优化，集训队论文2005