

## 2. QOJ 1825

### 2.1. 题目大意

一个王国有  $n$  个村庄， $g$  个骑士。第  $i$  个骑士必须被派往一个集合  $S_i$  中的村庄中的恰好一个。

给出  $r$  条连接两个指定村庄之间的双向道路修建计划，修建一条道路需要一定的代价。你需要选择骑士的派遣方案并修建一些道路，使得每个连通块中恰好有一个骑士。最小化修建道路的总代价，或者判断不存在满足条件的方案。

### 2.2. 数据规模

$$1 \leq n \leq 300, 0 \leq r \leq \frac{n(n-1)}{2}, 1 \leq g \leq n, 1 \leq |S_i| \leq n.$$

### 2.3. 解题过程

注意到本题不弱于判定完美匹配，考虑流建模。

首先  $\forall 2 \leq i \leq n$ ，加入  $1-i$  之间代价为  $+\text{inf}$  的道路，这样假定给出的图是连通的，存在最小生成树。

假设已经选定了一些结点存在骑士，求最小代价只需要先假设这些结点已经连通，然后求最小生成树即可。由此可知只有最小生成树上的边有用。考虑最小生成树上边的贡献。

建出 kruskal 重构树，一条边会贡献到答案中当且仅当这条边代表的点的左子树或右子树中的结点不存在骑士，这样在求最小生成树的过程中这条边才会被加入。很容易想到将其容斥为左子树不存在骑士 + 右子树不存在骑士 - 该子树不存在骑士。因此相当于每个结点存在一个权值  $v_i$ ，若该子树中不存在骑士则会对答案贡献这一权值。先把答案加上  $v_i$ ，然后改为“若该子树中存在骑士则将答案减去这一权值”。

这样就得到了一个最小费用最大流建模：

源点连向骑士，骑士连向重构树的叶节点（代表村庄），流量为 1 费用为 0。点  $i$  向父亲连边  $(1, -v_i)$ ，非叶结点还要向父亲连一条  $(+\text{inf}, 0)$ 。重构树的根是汇点。

由于该重构树是最小生成树的重构树，所以  $v_i \geq 0$ ，因此流量会优先流过  $(1, -v_i)$  这条边再流  $(+\text{inf}, 0)$ ，保证了正确性。

时间复杂度  $O(\text{MCMF}(n + g, ng))$ 。

### 2.4. 参考资料

无。