

3. QOJ 1824

3.1. 题目大意

给你一张 n 个点 m 条边的简单无向图，有若干条边是关键边。你需要找到一个简单环，使得每条关键边要么两个端点都不在环上，要么属于环边。或判断无解。

3.2. 数据规模

$$1 \leq n \leq 150, 1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

3.3. 解题过程

考虑先对图进行一些处理，在保持答案性质不变的前提下删除一些不可能出现在答案中的点和边：

- 如果一个点连接了超过三条关键边，将这个点删掉。
- 如果一个点连接了两条关键边，将和这个点相连的非关键边删掉。
- 删除一条关键边的时候，将其相连的两个点都删掉。
- 删除所有的割边。

经过这样处理之后，如果图不存在边了代表无解。否则可以构造性地说明此时必然有解。

连通的关键边构成链，可以将其缩成一条边，这样任意两条关键边无公共端点。逐步加入每条关键边的限制，即一开始将每条边都视作非关键边，然后每次取一条边变为关键边。初始时由于图是边双，因此可以找到一个环。设当前的关键边为 e ，如果 e 在环上或环外则无事发生；如果 e 的两个端点都在环上但不是环边，那么 e 的两个顶点在环上的两侧的边都是非关键边，任取环在 e 的一侧的边和 e 组成新环即可。否则 e 只有一个顶点在环上，此时将这个环缩为一个点，可以验证图的上述性质不变，递归地构造。得到新的图的作为答案的环后，如果该环不包含这个缩成的点则无事发生，否则需要找到一条路径穿过这个被缩的环连接两侧，由于 e 的存在，环形成的两条路径中至少一条是合法的。

不过有更方便的写法：由于我们知道了一开始的方法可以判定答案的存在性，因此直接依次扫描每条边，判断删去这条边（如果这条边是关键边仍然要删去其端点）后答案是否存在，如果仍然存在则删除，否则保留。显然这样最终得到的图是一个环，直接输出即可。

由于只有 $O(n)$ 条边删除后无解即将图删空，这部分的时间复杂度为 $O(n^2(n+m))$ 。在剩余部分每条边只会被删除一次，因此总时间复杂度为 $O(n^2(n+m))$ 。

3.4. 参考资料

<http://serjudging.vanb.org/wp-content/uploads/SpecialCycle.mov>