1 QOJ7509 01tree 解题报告

1.1 题目描述

有一棵树，点带 0/1 权值。
在一秒中你可以选择选择有边相连的颜色相同的点并反转它们的颜色。
在给定初始状态和最终状态的情况下，你总会使用最短的时间将起始状态转换为最终状态，如果无法转换，则不操作，不耗时。
现在初始状态和最终状态有些位置上的值被问号代替，你需要求出对于所有可能的起始、终止状态组合所花费时间的总和，对 10^9+7 取模。

1.2 数据范围

多组测试数据，n 的总和不超过 10^5。

1.3 解题过程

翻转深度为奇数的点的颜色，将操作变为交换相邻的 `0` 点和 `1` 点。
对于每条边单独考虑其贡献，其施加操作的次数为 s 与 t 在其子树中 `1` 的个数差的绝对值。
所以对于串 X，令 $q_{X,e}$ 为边 e 较深一端的子树中 ? 的个数，$q_{X,S}$ 为总的 ? 的个数；
令 $v_{X,e}$ 为边 e 较深一端的子树中 `1` 的个数，$v_{X,S}$ 为总的 `1` 的个数，有答案为:

$$\sum_{e\in E}\sum_{a=0}^{q_{s,e}}\sum_{b=0}^{q_{t,e}}\sum_{c=0}^{q_{s,S}-q_{s,e}}\sum_{d=0}^{q_{t,S}-q_{t,e}}[a+c+v_{s,S}=b+d+v_{t,S}]|a+v_{s,e}-b-v_{t,e}|\binom{q_{s,e}}{a}\binom{q_{t,e}}{b}\binom{q_{s,S}-q_{s,e}}{c}\binom{q_{t,S}-q_{t,e}}{d}$$

$$=\sum_{e\in E}\sum_{A}\sum_{B}[A+B+v_{s,S}-v_{t,S}=0]|A+v_{s,e}-v_{t,e}|\sum_{a=0}^{q_{s,e}}\binom{q_{s,e}}{a}\binom{q_{t,e}}{a-A}\sum_{c=0}^{q_{s,S}-q_{s,e}}\binom{q_{s,S}-q_{s,e}}{c}\binom{q_{t,S}-q_{t,e}}{c-B}$$

$$=\sum_{e\in E}\sum_{A}\sum_{B}[A+B+v_{s,S}-v_{t,S}=0]|A+v_{s,e}-v_{t,e}|\binom{q_{s,e}+q_{t,e}}{q_{t,e}+A}\binom{q_{s,S}-q_{s,e}+q_{t,S}-q_{t,e}}{q_{t,S}-q_{t,e}+B}$$

$$=\sum_{e\in E}\sum_{A}|A+v_{s,e}-v_{t,e}|\binom{q_{s,e}+q_{t,e}}{q_{t,e}+A}\binom{q_{s,S}-q_{s,e}+q_{t,S}-q_{t,e}}{q_{t,S}-q_{t,e}+v_{t,S}-v_{s,S}-A}$$

$$=\sum_{e\in E}\sum_{A}[A\ge v_{t,e}-v_{s,e}](A+v_{s,e}-v_{t,e})\binom{q_{s,e}+q_{t,e}}{q_{t,e}+A}\binom{q_{s,S}-q_{s,e}+q_{t,S}-q_{t,e}}{q_{t,S}-q_{t,e}+v_{t,S}-v_{s,S}-A}$$

$$+\sum_{e\in E}\sum_{A}[A< v_{t,e}-v_{s,e}](v_{t,e}-v_{s,e}-A)\binom{q_{s,e}+q_{t,e}}{q_{t,e}+A}\binom{q_{s,S}-q_{s,e}+q_{t,S}-q_{t,e}}{q_{t,S}-q_{t,e}+v_{t,S}-v_{s,S}-A}$$

$$=\sum_{e\in E}\sum_{A}[A\ge v_{t,e}-v_{s,e}](q_{s,e}+q_{t,e})\binom{q_{s,e}+q_{t,e}-1}{q_{t,e}+A-1}\binom{q_{s,S}-q_{s,e}+q_{t,S}-q_{t,e}}{q_{t,S}-q_{t,e}+v_{t,S}-v_{s,S}-A}$$

$$+\sum_{e\in E}\sum_{A}[A< v_{t,e}-v_{s,e}](q_{s,S}-q_{s,e}+q_{t,S}-q_{t,e})\binom{q_{s,e}+q_{t,e}}{q_{t,e}+A}\binom{q_{s,S}-q_{s,e}+q_{t,S}-q_{t,e}-1}{q_{t,S}-q_{t,e}+v_{t,S}-v_{s,S}-A-1}$$

$$+\sum_{e\in E}\sum_{A}[A\ge v_{t,e}-v_{s,e}](v_{s,e}-v_{t,e}-q_{t,e})\binom{q_{s,e}+q_{t,e}}{q_{t,e}+A}\binom{q_{s,S}-q_{s,e}+q_{t,S}-q_{t,e}}{q_{t,S}-q_{t,e}+v_{t,S}-v_{s,S}-A}$$

$$+\sum_{e\in E}\sum_{A}[A< v_{t,e}-v_{s,e}](v_{t,e}-v_{s,e}-q_{t,S}+q_{t,e}-v_{t,S}+v_{s,S})\binom{q_{s,e}+q_{t,e}}{q_{t,e}+A}\binom{q_{s,S}-q_{s,e}+q_{t,S}-q_{t,e}}{q_{t,S}-q_{t,e}+v_{t,S}-v_{s,S}-A}$$

以最终式子的第一项为例，要求的东西形如：

$$\sum_{e\in E}W_e\sum_{A}[A\ge X]\binom{U_{1,e}}{D_{1,e}+A}\binom{U_{2,e}}{D_{2,e}-A}$$

并且 $U_{1,e}+U_{2,e}$ 为定值 U 且 $D_{1,e}+D_{2,e}$ 为定值 D。

考虑该式子的组合意义，相当于在 U 个盒子内放置 D 个小球，并且第 $D_{1,e}+X$ 个小球必须放在前 $U_{1,e}$ 个盒子中。

在 $D_{1,e}+X$ 和 $U_{1,e}$ 变化不超过 1 时，该式子的增量可以 $O(1)$ 计算，所以直接预处理出每条边 e 的 $D_{1,e}+X$ 和 $U_{1,e}$ 后执行莫队算法即可解决本题，时间复杂度 $O(n\sqrt{n})$。

1.4 参考资料

CF1615F O(n) solution, Rainbow_qwq, https://www.luogu.com.cn/article/3w6vdsyc