

QOJ964 解题报告

东营市胜利第一中学 王一策

2025 年 9 月 20 日

目录

1 题目描述	1
2 数据范围	1
3 解题过程	1
3.1 算法 1	1
3.2 算法 2	1
3.3 算法 3	2
3.4 算法 4	2
3.5 算法 5	2

1 题目描述

给定一个长度为 n 的序列。有 q 次询问，每次询问会给定一个区间。你可以对区间内的数进行若干次操作：如果一个值 x 在区间内出现了至少两次，则你可以选择一个值为 x 的数字把它变成 $x - 1$ 或者 $x + 1$ 。输出经过任意次操作后区间内最小的没有出现过的自然数是多少。

2 数据范围

$$n \leq 5 \times 10^5, q \leq 5 \times 10^5.$$

3 解题过程

3.1 算法 1

可以证明，题目要求的值是，最大的 x ，满足小于 x 的数字有至少 x 个。

从小到大枚举 x ，然后枚举区间内的每一个数。 x 显然需要小于等于区间长度，所以复杂度 $\mathcal{O}(qn^2)$ 。

3.2 算法 2

优化上述枚举过程，只枚举 x ，可以做到 $\mathcal{O}(qn)$ 。

3.3 算法 3

考虑莫队，要做的操作是，加入一个数字，删除一个数字，找到最大的 x 满足小于 x 的数字个数大于等于 x 。

可以转化成给定一个序列，初始 $a_i = -i$ 。操作是后缀加一减一，查询第一个大于等于 0 的位置。这些操作可以通过线段树维护。复杂度 $\mathcal{O}(n\sqrt{n}\log n)$ 。

3.4 算法 4

算法 3 的复杂度多了 \log 。修改有 $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$ 次，而查询只有 $\mathcal{O}(n)$ 次。我们希望平衡一下。

首先把莫队换成回滚莫队，这样扫描区间右端点的时候只有后缀加，所以只需要保留后缀最大值，并且从前向后数第 k 个后缀最大值的值正好就是 $-k$ 。用并查集和链表维护这些后缀最大值的位置。每次后缀 $[x, n]$ 加一的时候，找到 x 前面第一个后缀最大值并将其删除即可。

然后还需要处理左端点的 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ 次后缀加法。因为这些加法最多让一个位置的值增加 \sqrt{n} ，所以只需要保留前 k 个后缀最大值的位置，再额外处理这些左端点移动导致的后缀加法即可。复杂度 $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$

3.5 算法 5

一个想法是从大到小扫描答案 x ，每次找到答案恰好等于 x 的区间并将其删除即可。问题在于如何找到这些区间。

考虑题目有什么性质：如果区间 a 包含了区间 b ，则 a 的答案一定比 b 要大。所以只需要保留左右端点都递增的若干个区间，表明他们的答案一定是最大的，会优先被扫描到，定义这些区间为关键区间。我们用线段树来维护这些关键区间。

当 $x \rightarrow x - 1$ 时，需要删除所有 $= x$ 的数字。因为关键区间的左右端点都递增，所以影响的一定是一个后缀，进行后缀减一即可。

然后通过线段树二分等方式来找到目前满足答案要求的区间并将其删除。删除之后，原来被它所包含的一些区间可能会变成关键区间，这里同样是对左右端点的单调的限制，线段树上二分找出所有新的区间即可，复杂度 $\mathcal{O}(n\log n)$ 。