2 Edit

2.1 题目来源

Petrozavodsk Summer 2018. Day 8: Yuhao Du Contest 5 Problem E[2]

2.2 题目大意

给定两棵有根树，点有点权 w_i，根的点权视为 0。第一棵树有 m 个节点，第二棵树有 n 个节点。

下文用数组 $[y_1, y_2, \cdots, y_m]$ 表示某个点 x 的所有儿子。儿子是有顺序的。

你可以进行三种操作任意次：

1. 对于点 x，设其儿子为 $[y_1, y_2, \cdots, y_{m-1}, y_m]$。你可以选择区间 $[l, r]$（$0 \le l - 1 \le r \le m$，即该区间可以为空）。添加一个新的点 z，点权为 w，其儿子为 $[y_l, y_{l+1}, \cdots, y_{r-1}, y_r]$，同时将 x 的儿子修改为 $[y_1, \cdots, y_{l-1}, z, y_{r+1}, \cdots, y_m]$。该操作的代价为 $w \times c_1$。
2. 对于点 x，设其儿子为 $[y_1, y_2, \cdots, y_{m-1}, y_m]$。你可以选择一个儿子 y_k。记 y_k 的儿子为 $[z_1, z_2, \cdots, z_{p-1}, z_p]$（可以没有儿子，即为空），将 x 的儿子修改为 $[y_1, \cdots, y_{k-1}, z_1, \cdots, z_p, y_{k+1}, \cdots, y_m]$。若 y_k 的权值为 w，该操作的代价为 $w \times c_2$。
3. 将点 x 的权值改为 w_1。若其原来的权值为 w_0，该操作的代价为 $c_3 \times |w_0 - w_1|$。

特别地，由 1 操作增加的点不能进行 3 操作，由 3 操作修改的点不能进行 2 操作。

求将第一棵树变为第二棵树的最小代价。两棵树相同当且仅当根节点的点权相同，且根的所有儿子构成的数组长度相同、对应子树相同。

2.3 数据范围

对于所有数据，满足 $1 \le n \le 2000, 1 \le m \le 50, 1 \le c_1, c_2, c_3 \le 10^6, 0 \le w_i \le 10^6$。

2.4 解题过程

考虑修改过程中，所有非被 1 操作添加也未被 2 操作删除的点，它们的 DFS 序始终不变，祖先关系也始终不变。证明比较简单，因为每次操作前后， DFS 序和祖先关系都没有改变，所以从开始到结束也都是不变的。

我们将这些点在两个树上分别标记出来，并记录对应关系（根必须对应）。确定对应关系后，最优操作一定是先把第一棵树上未被标记的点删除，然后修改点权，最后把第二棵树上未被标记的点添加上。

第一棵树上未被标记的点对代价有 $c_2 \times$ 点权的贡献， 第二棵树上未被标记的点对代价有 $c_1 \times$ 点权的贡献，两棵树上对应起来的点对代价有 $c_3 \times$ 点权差的贡献。

先化简一下这个贡献形式，设第一棵树上的点权和为 W_1，第二棵树上的点权和为 W_2。先将代价记为 $W_1 c_2 + W_2 c_1$，然后对于对应上的每对点，若其在第一棵树上的权值为 a，第二棵树上的权值为 b，则对代价有 $|a - b| c_3 - a c_2 - b c_1$ 的贡献。

不妨用 a_x 表示第一棵树上点 x 的贡献，b_y 表示第二棵树上点 y 的权值。

考虑为第一棵树上每个点 x 求出子树内最小 DFS 序 L_x 与最大 DFS 序 R_x，这样判断两个点是否为祖先关系可以直接判断 $[L_x, R_x]$ 是否有交（任意两个 DFS 序区间只有包含或不交）。

[2] https://qoj.ac/problem/2207

DP，设 $f_{x,l,r}$ 表示第二棵树上的点 x，设其子树内所有被标记的点对应到第一棵树上的集合为 S，有 $l=\min_{i\in S} L_i, r=\max_{i\in S} R_i$。

同时维护一个 $g_{x,l,r}=\min_{l\le i\le j\le r} f_{x,i,j}$ 易于转移。

f 的转移看起来很麻烦，好像还要维护 $g'=\min_{l\le i} f_{x,i,r}, g''=\min_{j\le r} f_{x,l,j}$，不妨先不对 f 转移。

g 的转移是简单的，顺序枚举 x 的儿子 y，用 $g_{x,l,p-1}+g_{y,p,r}$ 更新 $h_{l,r}$，最后将 $g_{x,l,r}$ 赋值为 $\min(g_{x,l,r}, g_{y,l,r}, h_{l,r})$ 即可。

考虑 x 被标记的情况，枚举 x 对应第二棵树上的点 y，则用 $g_{x,L_y+1,R_y}+|a_y-b_x|c_3-a_yc_2-b_xc_1$ 更新 f_{x,L_y,R_y}。

这里更新 f_{x,L_y,R_y} 的时候也不用改 f，直接去更新 $l\le L_y\le R_y\le r$ 的 $g_{x,l,r}$ 即可。注意要按照 L_y 升序枚举 y，以保证 x 只会对应一个 y。

直接输出 $g_{1,1,m}$ 是不正确的。需要在 x 为根，枚举到 $L_y=1$ 的时候输出 $g_{x,2,m}$。

时间复杂度 $O(nm^3)$。

2.5 参考资料

无。