3 Jump Jump Jump

3.1 题目来源

Petrozavodsk Summer 2018. Day 8: Yuhao Du Contest 5 Problem J[3]

3.2 题目大意

给定 m 个二维向量 (x_i, y_i)。有一只兔子，初始在 $(0,0)$。

每个时刻，设兔子的坐标为 (X,Y)，它会等概率选择 m 个向量之一，移动 $(X+x_i, Y+y_i)$。

有 n 个陷阱，第 i 个坐标为 (i,i)，当兔子走到某个陷阱上后，会被困住无法继续移动。

对于每个 i，求兔子被困在第 i 个陷阱的概率，答案对 998244353 取模。

3.3 数据范围

对于所有数据，满足 $1 \le n \le 10^5, 1 \le m \le 16, 0 \le x_i, y_i \le 3$，所有向量互不相同。

3.4 解题过程

假设陷阱不会困住兔子，走到后依然可以继续移动，我们计算出走到陷阱 i 的概率 g_i（计算方式见下文）。

设最终答案为 f_i，钦定 $f_0 = g_0 = 1$，记 f, g 的生成函数为 F, G。

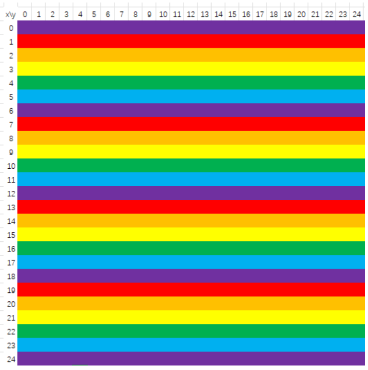
由容斥可知 $FG + 1 = 2G$，即 $F = 2 - \dfrac{1}{G}$，进行一次多项式求逆即可，复杂度 $O(n \log n)$。

接下来考虑如何求出 g_i：

如果有 $x_i = y_i = 0$ 的向量，可以直接删去（m 同时减少 1）不影响答案。

进行一些坐标变化，将 (x_i, y_i) 变换为 $(x_i + y_i, y_i)$，这样每次移动一定会使得 x 维增加。

兔子的起点修改为变换后的 $(0,0)$，陷阱的坐标为 $(2i, i)$。



如上图所示，将 x 坐标上相邻的 6 条横线分为一组，第 i 组包含 $x = 6i-5 \sim 6i$（从红色到紫为一组）。

记 $F(k,x,y)$ 为从 $(0,0)$ 走到 $(6k-5+x, y)$ 的概率。定义域为 $0 \le x \le 5, 0 \le y \le 6k$。

[3]https://qoj.ac/problem/2212

记 $G(k,x,y)$ 为从 $(0,0)$ **首次走到第 k 组时**在 $(6k-5+x,y)$ 的概率。可以由 $F(k,x,y)$ "差分"得到。

首先暴力计算出 $F(1,x,y)$。尝试倍增求出所有 $F(2^t,x,y)$（$6\times 2^t\le 2n$）。

稍微扩展一下 $F(k,x,y)$ 的定义域，从 $0\le x\le 5, 0\le y\le 6k$ 扩展到 $0\le x\le 10, 0\le y\le 6k+5$。新增的可以由 $0\le x\le 5$ 的部分 DP 得到，不必专门维护。

对于 $0\le x\le 5, 0\le y\le 6(p+q)$，有：

$$F(p+q,x,y)=\sum_{u=0}^{5}\sum_{i=0}^{y}G(p,u,i)\times F(q,x+5-u,y-i)$$

单次计算可以先全部 NTT，然后用点值计算，最后一起 INTT，复杂度为 $O((p+q)K^2\log(p+q))$（此题中 $K=6$）。

需要预处理到 $2^t>\dfrac{n}{K}$，则预处理部分的总复杂度为 $O(nK\log n)$。

再扩展一下 $F(k,x,y)$ 的定义域，当 $0\le x\le 5, y\notin[0,6k]$ 时 $F(k,x,y)=0$。

分治，对于分治区间 $[l,r]$，考虑已经算出了 $0\le x\le 5, -3(r-l+1)\le y-3(l-1)\le 3(r-l+1)$ 的所有 $F(l,x,y)$。

同时，根据已知的 $F(l,x,y)$ 可以算出相应范围的 $G(l,x,y)$。

若 $l=r$，则枚举 $1\le i\le 3$，$g_{3(l-1)+i}=F(2i-1,i)$。

否则找到最大的 t 使得 $l+2^t\le r$。记 $d=2^t$。

对于分治区间 $[l+d,r]$，用上面写的大卷积算出 $F(l+d,x,y)$，再截断取需要的值。

对于分治区间 $[l,l+d-1]$，直接将 $F(l,x,y)$ 截断，保留需要的值。

初始化可以直接令 $F(0,5,0)=1$，并进行区间为 $[0,\lceil\dfrac{n}{K}\rceil]$ 的分治（此题中 $K=6$）。

对于分治区间 $[l,r]$ 的复杂度为 $O((r-l+1)K^2\log(r-l+1))$，总时间复杂度为 $O(nK\log^2 n)$，可以通过。

3.5 参考资料

无。