

4 Link Cut Digraph

4.1 题目来源

Petrozavodsk Summer 2018. Day 8: Yuhao Du Contest 5 Problem L⁴

4.2 题目大意

给定一张 n 个点的图，一开始没有边。有 m 个修改，第 i 个修改会往图中添加有向边 $u_i \rightarrow v_i$ 。

你需要在每次修改后输出 (x, y) 的数量，满足 $1 \leq x < y \leq n$ ，且 x, y 强连通。

4.3 数据范围

对于所有数据，满足 $1 \leq n \leq 10^5, 1 \leq m \leq 2.5 \times 10^5$ 。

4.4 解题过程

离线，用 (u, v, t) 表示一条边 $u \rightarrow v$ 及其出现时间 t 。

对于边集 E ，记 $E_{[l,r]}$ 表示其中出现时间为 $l \sim r$ 的所有边构成的集合。

分治，定义 $clc(l, r, V, E)$ ，表示 $[l, r]$ 内的边不参与缩点的情况下，缩点后点集为 V （记录每个强连通分量的大小），边集为 E 。

记 $p = \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor$ ，对 $G = (V, E_{[1,p]})$ 跑一次缩点，将这次缩点的结果记为 $G' = (V', E')$ 。

若 $l = r$ ，则对于 V' 中每个连通块，设其大小为 w ，对答案有 $\binom{w}{2}$ 的贡献，求和并输出即可。

对于 $E_{[1,p]}$ 中的一条边：

1. 若其在缩点过程中被缩掉了，将其加入 E_l 。同时因为被缩掉了，所以不必加入 E_r 。
2. 若其在缩点过程中没有被缩掉，将其加入 E_r 。同时因为其在处理 $[1, p]$ 内的边时依旧没有被缩掉，所以在此之前一定不会被缩，故不必加入 E_l 。

分治到 $clc(l, p, V, E_l)$ 和 $clc(p+1, r, V', E_r + E_{[p+1,n]})$ 。

每层分治的 $\sum |E| \leq m$ 。但 $\sum |V|$ 的大小没有保证。每次分治时，需要及时删除 $|V|$ 中的孤立点并计入答案，保证 $|V| = O(|E|)$ 。

总复杂度 $O(m \log m)$ 。

4.5 参考资料

无。

⁴<https://qoj.ac/problem/2214>