

Hard Problem

给定长为 n 的数组 $a_{1 \sim n}, f_{1 \sim n}$ 和常数 k , 称 $a_{1 \sim n}$ 的一个长为 $2c$ 的子区间 $[l, l+2c)$ 是好的当且仅当 $a_{l \sim l+c-1}$ 的最大值与 $a_{l+c \sim l+2c-1}$ 的最大值的差不超过 k 。

求出所有好的子区间的 $a_{l+c-1} \cdot f_c$ 之和, 对 998244353 取模。

多组数据, $\sum n \leq 5 \times 10^5$, $0 \leq k \leq \min(n, 10)$, $1 \leq a_i \leq n$ 。

- 对于一个好的子区间, 记 $m = l + c - 1$, 考虑左半部分的最后一个最大值 p 和右半部分的第一个最大值 q , 不妨设 $a_p \leq a_q \leq a_p + k$, $a_p > a_q$ 的部分同理。
- 枚举 p , 考虑找到其对应的 m 的取值范围。找到 p 左侧第一个 $> a_p$ 的位置 l^* 及右侧第一个 $> a_p + k$ 的位置 r^* , 则最终的区间不能包含 l^*, r^* 。再找到 p 右侧第一个 $\geq a_p$ 的位置 x , 则 p, x 一定分别在最终区间的左侧、右侧。注意此处要求 $a_x \leq a_p + k$, 否则这个 p 无解。
- 则两部分限制分别为 $p \leq m < x$ 和 $\frac{l^* + x}{2} \leq m < \frac{r^* + p - 1}{2}$, 将两段区间取交并枚举其中所有 m , 每个 m 对应着一段合法的 c 的取值范围, 直接前缀和计算其即可。

- 接下来说明枚举量正确。对于一个 p , 其对应的 m 的枚举量不超过 $\min(x - p, (r^* - x) + (p - l^*))$, 其中 l^*, p, x, r^* 依次排列, 记 $A = p - l^*, B = x - p, C = r^* - x$, 则枚举量 $\leq \min(B, A + C)$ 。
- 对序列 $a_{1 \sim n}$ 建出笛卡尔树, 则 A 和 B 分别对应 p 的左右子树的大小, 讨论:
 - 若 $B \leq A$, 则枚举量不超过 p 的轻子树大小 B ;
 - 若 $B > A$, 则枚举量 $\leq A + C$, 不超过 p 的轻子树大小 A 与 x 的轻子树大小之和。其中 x 的右子树大小 $\leq C$ 即轻子树大小 $\leq C$ 。
- 由于 $a_p \geq a_x - k$, 故每个数作为 x 的次数不超过 k , 总枚举量不超过笛卡尔树轻子树大小和的 k 倍。
- 总时间复杂度 $O(nk \log n)$ 。