QOJ 4884

Battleship: New Rules

这是一道交互题。
有一个 $n \times n$ 的棋盘，A 与 B 在其上进行游戏。首先 A 行动，流程如下：

- 选择一个整数 k，满足 $n \le k \le \lceil \frac{n}{2} \rceil^2$；
- 在棋盘上放入 k 张纸条，每张纸条为一个 $1 \times a$ 或 $a \times 1$ 的矩形，其中 a 为每张纸条独立选择的一个整数；
- 需要保证没有任意两张纸条有公共点；
- 需要保证有纸条覆盖的格数最多。

QOJ 4884

Battleship: New Rules

在这之后，B 行动：

- B 不知道每张纸条的位置；
- B 的目标为找到一个 2×2 的空位使得没有任意纸条覆盖或汇报无解。
- 可以向 A 依次询问若干格子是否被纸条覆盖。

你需要作为 B 进行游戏，在不超过 $6n$ 次询问内求解答案或汇报无解。
多组数据，$3 \le n \le 1000$，$\sum n \le 5000$。

QOJ 4884 Solution

- 先考虑 A 的行动策略，由于纸条间不能有公共点，故将每张纸条的边界分别向右、下拓展一格，变为 $2 \times (a+1)$ 的矩形，同时棋盘拓展为 $(n+1) \times (n+1)$，目标为找到其中任意空位。
- 即原纸条的覆盖面积为 s，则有 $2(s+k) \leq (n+1)^2$，即 $s \leq \dfrac{(n+1)^2}{2} - k$。
- 对 n 的奇偶性进行讨论：
  - 若 n 为奇数，很容易构造出 k 为 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 和 $\lceil \frac{n}{2} \rceil^2$ 的方案覆盖全局，可以通过合并来减小 k，故此时无解；
  - 若 n 为偶数，容易对 $n=4$ 构造出使用 4 张纸条的方案使得全局空位恰为 1，否则可以使用 $2 \sim n-1$ 张纸条转化为 $n-2$ 的子问题，容易计算出上下界分别为 n 和 $\dfrac{n^2}{2}$。
- 当且仅当 n 为偶数时有唯一解。

QOJ 4884 Solution

- 考虑分治算法，设已确定解的坐标 $x_l \le x \le x_r, y_l \le y \le y_r$，对于长边分治，不妨设 $x_r - x_l > y_r - y_l$，则取 $x_m = \frac{x_l + x_r}{2}$，对于所有 $y_l \le p \le y_r$ 询问 (x_m, p)，用这些询问结果更新右下 2×2 格子的覆盖情况。
- 一旦找到解便立即输出，否则可归纳证明此时已确定已确定不能作为答案的格数为偶数，未确定的格数即为奇数，答案便在奇数格一侧。
- 总询问次数为 $n + n/2 + n/2 + n/4 + \cdots = 3n$，时间复杂度为 $O(n^2)$。