Baltic OI 2023 Day 1 / A. Astronomer

题目大意

给定平面上 n 个点，求所有包含至少 k 个点的圆中，圆心到圆点距离 $\times s$ 加上半径 $\times t$ 的最小值。

数据范围：$1 \le k \le n \le 700$，精度误差不超过 10^{-6}。

显然，最优解的圆的边界上至少包含一个给定点。考虑枚举这个给定点 i，并二分答案，那么只需要关心圆心的位置，半径由圆心到点 i 的距离决定。

考虑每个 $j \neq i$ 的点 j，那么当圆心在两点中垂线离 i 较远的一侧时圆能够包含点 i。那么考虑当圆心相对于点 i 的角度固定时，圆心的可能位置是从中垂线与该角度的射线相交点出开始的一条射线。

注意到直线上，每个点作为圆心时，总代价是单峰的。于是可以先三分出最小值在哪个位置，然后根据答案在两边分别二分出分界点在哪里。于是对于每个点 j，就求得了一个角度的区间，满足只有圆心在这个区间中时，才有可能合法地包含这个点。而对于一个角度，若有至少 $k-1$ 个点对应的区间包含这个角度，那么可以取这 $k-1$ 条中垂线与该角度射线的交点中，距离点 i 最远的那个作为圆心。因为这样既满足代价不超过二分的答案，又满足圆包含这 $k-1$ 个点（算上 i 就是 k 个）。

总算法流程：对于每个点对，三分预处理峰值的位置。二分答案后，对于每个点，二分出两个端点，并对所有区间做极角排序，判断是否存在一个角度被至少 $k-1$ 个区间包含即可。使用随机打乱的技巧可以去掉一个 log，总时间复杂度 $\mathcal{O}(n^2(\log V + \log \varepsilon^{-1} + \log n))$。