2B – Stosy naleśników

Autor zadania: Adam Gąsienica-Samek

Autor omówienia: Adam Gąsienica-Samek

Treść

Dane jest n stosów liczb, każdy stos jest monotoniczny (albo rosnący, albo malejący) i ma rozmiar m. Chcemy wyznaczyć największą sumę osiąganą przez pewne k liczb zebranych ze szczytów stosów.

Rozwiązanie

Podzielimy sobie nasze stosy na dwie grupy – malejące i rosnące. Zamiast rozwiązywać nasz problem dla pojedyńczego k, policzymy wynik od razu dla każdego $i = 1, 2, \ldots, k$, osobno dla grupy stosów malejących, a osobno dla grupy stosów rosnących. Dla każdego i spojrzymy na najlepszą sumę dla i liczb ze stosów malejących oraz $k - i$ ze stosów rosnących, z czego weźmiemy maksimum po i.

Dla malejących stosów możemy zastosować podejście zachłanne, w każdym kroku zdejmując największą liczbę.

Żeby rozwiązać problem dla rosnących stosów musimy zauważyć następującą obserwację: *będzie istniał co najwyżej jeden częściowo rozpoczęty stos.* Z czego to wynika? Przypuśćmy, że mamy dwa stosy $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_m$ i $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_m$, z których zebraliśmy odpowiednio x i y elementów. Jeśli $a_{x+1} \geq b_y$, to możemy odłożyć b_y na stos i zdjąć a_{x+1}. Ostatni zdjęty element z b zmniejszył się, zaś pierwszy nie wzięty z a zwiększył się, więc możemy powtarzać tą operację dopóki b nie jest pełne lub a puste. W przeciwnym przypadku mamy $a_x \leq a_{x+1} \leq b_y \leq b_{y+1}$, więc możemy wykonać analogiczną zamianę w drugą stronę.

Ponieważ wszystkie stosy są równej długości, to licząc wynik dla danego i weźmiemy $p = \frac{i}{m}$ pełnych stosów, a z jednego stosu weźmiemy $q = i \bmod m$ elementów. Posortujmy stosy po łącznej sumie. Jeśli częściowy stos nie jest w p największych stosach, to wynikiem będzie suma p największych stosów plus suma pierwszych q elementów częściowego stosu (wybieramy ten, dla którego ta suma jest największa). Jeśli stos częściowy jest w p największych, to wynikiem będzie suma $p + 1$ największych stosów minus suma ostatnich $m - q$ elementów częściowego stosu (wybieramy ten, dla którego ta suma jest najmniejsza). Po preprocessingu maksimów i minimów na prefiksach i sufiksach jesteśmy w stanie dla pojedyńczego i odpowiadać w czasie $O(1)$.

Złożoność części dla stosów malejących to $O(nm \log nm)$, a dla rosnących $O(nm)$, co daje nam całkowitą złożoność $O(nm \log nm)$.