

4B – Multi-brydż

Autor zadania: Konrad Paluszek

Autor omówienia: Jakub Onufry Wojtaszczyk

Treść

W grę karcianą gra $2n$ graczy, w dwóch drużynach. Gracze drużyny P siedzą na pozycjach nieparzystych, zaś drużyny A na parzystych. Każdy gracz trzyma dwie karty, karty mają numery od 1 do $4n$, wyższy numer jest lepszy. W pierwszym ruchu rozpoczyna któryś gracz, wykładając na stół jedną ze swoich dwóch kart. Następnie jedną kartę wyklada gracz po nim, dalej następny, aż każdy gracz wyłoży jedną kartę. Jeden punkt zdobywa drużyna gracza, który wyłożył najwyższą spośród wyłożonych kart, drugi punkt zdobywa drużyna gracza, który zatrzymał na ręku najwyższą spośród zatrzymanych kart.

Dany jest ciąg długości $2n$, gdzie i -ty element ciągu oznacza liczbę punktów, które zdobędzie drużyna A przy optymalnej grze, jeśli jako pierwszy rusza się gracz i -ty. Masz określić liczbę układów kart, które generują taki ciąg (modulo duża liczba pierwsza).

Rozwiązanie

Wpierw rozważmy zadanie w drugą stronę — dla danego układu kart oraz gracza rozpoczynającego, jak wygląda optymalna strategia?

Optymalna strategia

Zauważmy, że drużyna, która posiada kartę $4n$ z pewnością zdobędzie przynajmniej jeden punkt. Pytanie, kto zdobędzie ten drugi punkt. Nazwijmy drużynę, która ma kartę $4n$ drużyną W (od wygrywania), a drugą drużynę oznaczmy L . Rozważmy najdłuższy ciąg kart $4n, 4n-1, \dots, 4n-k$ taki, że karty parzyste w tym ciągu są w ręku drużyny L , nieparzyste w ręku drużyny W , a gracze je posiadający grają w kolejności od najmniejszej z kart w ciągu (czyli wpierw może się ruszać pewna liczba graczy nie posiadających żadnej z tych kart, potem gracz z $4n-k$, potem może znowu być trochę nieistotnych graczy, potem gracz z $4n-(k-1)$, i tak aż do $4n$). Taki ciąg zawsze da się skonstruować (najwyżej będzie się on składał z jednej karty). Udowodnijmy, że drugi (niepewny) punkt zdobędzie drużyna, która ma kartę $4n-k-1$. Drużynę tę nazwiemy „drużyną biorącą”.

Karta $4n-k-1$ nie występuje w naszym ciągu, więc albo jest w ręku tej samej drużyny, co $4n-k$ (nazwijmy to pierwszym przypadkiem, P1), albo w ręku przeciwnej drużyny, ale występuje po $4n-k$ (nazwijmy to drugim przypadkiem, P2). Aby zdobyć niepewny punkt, drużyna biorąca gra następującą strategią:

- Kartę m dla $m > 4n-k$ wyklada tylko, jeśli została wyłożona karta $m-1$ (gracz z kartą $m-1$ należy do przeciwnej drużyny i rusza się przed graczem z kartą m).
- W przypadku pierwszym, kartę $4n-k$ należy wyłożyć, a karty $4n-k-1$ — nie.
- W przypadku drugim, kartę $4n-k-1$ należy wyłożyć tylko, jeśli gracz z kartą $4n-k$ jej nie wyłożył (chyba, że mamy też wyższą kartę na ręku, i pierwsza z reguł każe nam ją wyłożyć).
- Gracze nie posiadający żadnej karty o wartości przynajmniej $4n-k-1$ są nieistotni, i grają jakkolwiek.

W wyniku stosowania tej strategii, po każdym ruchu istotnego gracza drużyny biorącej zachodzi:

- W przypadku pierwszym: zarówno najwyższa wyłożona, jak i najwyższa niewyłożona karta (spośród kart $4n-k-1$ oraz kart graczy, którzy już grali) należy do drużyny biorącej.
- W przypadku drugim podobnie, przy czym ponownie liczymy kartę $4n-k-1$ za wyłożoną lub nie od początku, i niezmiennik zachodzi od ruchu gracza z kartą $4n-k+1$.

Jeśli biorąca jest drużyna W , to ostatnim graczem z istotną kartą, który się rusza, jest gracz z kartą $4n$, i drużyna ta zdobędzie dwa punkty. Jeśli jest to drużyna L , gracz z kartą $4n$ będzie

decydował, czy ją wyłożyć, czy nie, i drużyna biorąca zdobędzie punkt za tę grupę kart, w której nie będzie $4n$.

Co się zmienia przy zmianie gracza startowego?

Rozważmy wpieryw gracza startowego tuż po graczu z kartą $4n$ (to daje najdłuższy możliwy ciąg w optymalnej strategii), przez k^* oznaczmy uzyskane dla tego ciągu k . Przesuwajmy gracza startowego do kolejnych graczy, i zastanówmy się jak zmienia się liczba punktów. Oczywiście cokolwiek zmieni się tylko, gdy graczem startowym zostanie gracz po graczu z istotną kartą (czyli od $4n$ do $4n - k^*$).

- W przypadku pierwszym, kiedy graczem startowym przestaje być gracz z kartą $4n - k^*$, wynik się nie zmienia: przejdziemy do przypadku drugiego (bo teraz k będzie o jeden mniejsze, a gracz z kartą $4n - k^*$ (która należy do naszej drużyny) rusza się teraz ostatni. Każde kolejne przejście miejsca startu przez gracza z istotną kartą zmienia drużynę biorącą — pozostajemy w przypadku drugim, natomiast k maleje o 1, więc zmienia się drużyna biorąca. Na końcu, kiedy graczem startowym przestaje być gracz z $4n$, to, czy zmieni się drużyna biorąca, zależy od parzystości k^* .
- W przypadku drugim, każda zmiana gracza startowego (poza ewentualnie zmianą na $4n$, w zależności od parzystości k^*) zmienia drużynę biorącą.

Zauważmy, że jeśli $k^* = 0$, to jesteśmy w przypadku pierwszym (bo zawsze jeśli $4n$ i $4n - 1$ są w różnych drużynach, to w optymalnym obrocie gracz z $4n - 1$ zawsze gra przed graczem z $4n$).

Na ile sposobów można ułożyć karty?

Pozostało zobaczyć, na ile sposobów można ułożyć karty tak, by otrzymać ciąg zadany na wejściu.

Wpieryw trzeba sprawdzić kilka niezmienników. Po pierwsze, jeśli na wejściu pojawia się liczba 0, to nie może pojawić się 2, i vice versa (bo drużyna W zawsze zdobywa przynajmniej jeden punkt. Po drugie, jeśli gracz startowy przesuwa się od gracza z drużyny A do gracza z drużyny P , to liczba punktów zdobyta przez A może zostać stała lub wzrosnąć, podobnie jeśli przesuwa się z P do A to może zostać stała lub zmaleć. Jeśli te warunki są spełnione, to wystarczy nam zapamiętać jakiej długości są kolejne ciągi jedynek i nie-jedynek (przy czym obracamy ciąg tak, by granica między graczami $2n$ a 1 była granicą ciągu, o ile to możliwe).

Wpieryw opiszmy przypadki szczególne, gdzie liczba punktów nie zależy od gracza startowego. Musi to być przypadek P1, $k^* \leq 1$. Jeśli $k^* = 0$, to jedna drużyna ma $4n$ i $4n - 1$, i zgarnia wszystkie punkty. To może się wydarzyć na

$$\frac{n(4n-2)!}{2^{2n-1}} + \frac{n(n-1)(4n-2)!}{2^{2n-2}}$$

sposobów (pierwszy składnik odpowiada sytuacji, gdy jeden gracz posiada obie te karty, drugi — sytuacji, gdy są to dwaj różni gracze).

Jeśli $k^* = 1$, to jedna drużyna posiada $4n$, a druga $4n - 1$ i $4n - 2$; zawsze jest remis. To może się wydarzyć na

$$\frac{n^2(4n-3)!}{2^{2n-2}} + \frac{n^2(n-1)(4n-3)!}{2^{2n-3}},$$

sposobów (ponownie pierwszy składnik odpowiada za przypadek, gdzie jeden gracz posiada $4n - 1$ i $4n - 2$, a drugi — za przypadek, gdy są to różni gracze).

W pozostałych przypadkach liczba punktów zależy od gracza startowego. Jeśli na wejściu mamy ℓ ciągów jedynek (i ℓ ciągów drugiej wartości), to rozważamy cztery sposoby uzyskania takiego wyniku:

- Przypadek P1, $k^* = 2\ell + 1$,
- Przypadek P1, $k^* = 2\ell$,
- Przypadek P2, $k^* = 2\ell$,
- Przypadek P2, $k^* = 2\ell - 1$.

Każdą z tych czterech opcji zliczamy osobno, i sumujemy wyniki.

Opcja pierwsza (P1, $k^* = 2\ell + 1$) — wybieramy jedną z ℓ pozycji, gdzie znajduje się $4n - 1$. To jednoznacznie wyznacza pozycje kart od $4n - k^* + 1$ do $4n - 1$. Karty $4n$ i $4n - k^*$ znajdują się pomiędzy $4n - 1$ a $4n + 1 - k^*$, w tej kolejności. Jeśli pomiędzy $4n - 1$ a $4n + 1 - k^*$ jest $2m$ graczy (po m z każdej drużyny), to sposobów na umieszczenie tych dwóch kart jest $m(m + 1)/2$. Kartę $4n - k^* - 1$ trzeba umieścić u gracza z tej samej drużyny co $4n - k^*$, można to zrobić na $\ell + 1$ sposobów u jednego z graczy, który już ma jakąś istotną kartę, lub na $2n - \ell - 1$ sposobów u jednego z pozostałych graczy. Pozostałe karty rozmieszczamy na $(4n - (k^* + 2))!2^{2n - k^* - 2}$ sposobów jeśli $4n - k^* - 1$ jest u gracza bez innej istotnej karty, lub $(4n - (k^* + 2))!2^{2n - k^* - 1}$ w przeciwnym razie.

Podobne wzory otrzymamy dla pozostałych trzech opcji. Przy implementacji należy wpierw stabilizować wartości $p!$ oraz 2^{-p} dla p do $4n$, modulo dana liczba pierwsza. Wtedy obliczenia dla pojedynczego ciągu wykonujemy w czasie $O(\ell)$, gdzie ℓ to liczba ciągów jedynek na wejściu — po wcześniejszym podziale na te ciągi w czasie $O(n)$.