

5C – Palindromy

Autor zadania: Jakub Onufry Wojtaszczyk

Autor omówienia: Jakub Onufry Wojtaszczyk

Treść

Mamy dane liczby n oraz k . Mamy skonstruować słowo składające się z liter P oraz A o długości n , w którym najdłuższe pod słowo będące palindromem będzie miało długość k , lub stwierdzić, że się nie da.

Rozwiązanie

Warto to zadanie spróbować rozwiązać “ręcznie” dla niewielkich wartości n oraz k . Szybko dochodzimy do wniosku, że nie da się skonstruować takiego słowa tylko wtedy, gdy n jest duże, a k — małe. Przeszkodą wtedy jest to, że w wystarczająco długim słowie zawsze gdzieś znajdzie się pod słowo długości k będące palindromem.

Widać więc, że kluczowe będzie szukanie słów bez długich palindromicznych pod słów. Tu z pomocą przyjdzie nam spostrzeżenie, że jeśli s jest słowem długości x , i słowo s^2 (czyli słowo s powtórzone dwukrotnie) nie zawiera palindromów dłuższych niż jakieś $x < |s| - 1$, to s^m (czyli słowo s powtórzone m razy) nie zawiera palindromów dłuższych niż x dla żadnego m .

Żeby to udowodnić, w pierw zauważmy, że jeśli istnieje pod słowo długości x będące palindromem, to istnieje też słowo długości $x - 2$ (zakładając, że $x > 2$). Więc wystarczy sprawdzić dla $x + 1$ i $x + 2$. A skoro $x + 2 \leq |s|$, to pod słowo długości $x + 1$ lub $x + 2$ musi się zawierać w najwyżej dwóch sąsiednich kopiach s , i wobec tego nie jest palindromem (bo s^2 nie zawiera palindromów dłuższych niż x).

Teraz wystarczy zauważyć, że np. słowo PPAAPA spełnia nasz warunek dla $x = 4$ (słowo $s^2 = PPAAPAPPAAPA$ nie zawiera palindromu dłuższego niż 4). Zatem jeśli $k \geq 4$, to wystarczy na początku napisać k liter A, a potem powtarzać słowo s aż osiągniemy długość n .

Jeśli $k \leq 3$, to można ręcznie sprawdzić, że najdłuższe słowa, gdzie najdłuższy palindrom ma długość k , to odpowiednio AP, AAPP i AAAPAPPP. Jeśli n jest zbyt duże (większe od 2 dla $k = 1$, od 4 dla $k = 2$ lub od 8 dla $k = 3$), to odpowiedzią jest NIE, a jeśli jest mniejsze lub równe, to wystarczy wypisać prefiks właściwego słowa długości n .