5A – Splatanie nawiasów

Autor zadania: Adam Gąsienica-Samek

Autor omówienia: Paweł Parys

Treść

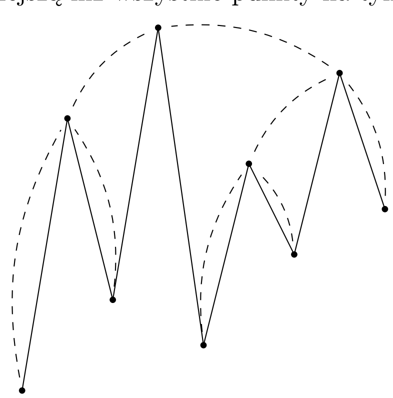
Dane są dwa słowa s i t złożone z nawiasów. Oblicz dla ilu przedziałów (podsłów – ale liczymy pary (początek, koniec), a nie różne podsłowa) słowa t można spleść całe s i ten przedział t do poprawnego wyrażenia nawiasowego. Słowa na wejściu są podane w sposób skompresowany: mamy listę liczb mówiących ile mamy pod rząd takich samych nawiasów. Limit na liczbę tych kawałków to 10^5, natomiast każdy z nich może zawierać do 10^6 (takich samych) nawiasów.

Rozwiązanie

Zamiast o nawiasach, wygodniej będzie mówić o zmieniających się poziomach, gdzie nawias otwierający to $+1$, natomiast zamykający to -1. Na podstawie ciągu z wejścia możemy wyznaczyć tablicę sum prefiksowych A, gdzie $A[i]$ to suma pierwszych i liczb z wejścia z odpowiednim znakiem (długość tablicy jest o 1 większa niż długość wejścia); analogicznie B dla drugiego ciągu. *Pozycjami* będę nazywał miejsca między (oraz przed i po) liczbami z wejścia; są to zarazem pozycje naszych tablic A i B. *Poziom* pozycji to wartość w odpowiedniej tablicy (A lub B), przy czym będą nas bardziej interesowały różnice poziomów niż ich wartości absolutne. Z kolei *odcinek* to fragment między pozycjami. Pozycje będę oznaczał literami angielskimi, natomiast *punkty* między nawiasami (z których niektóre są pozycjami) literami greckimi α, β, γ. Dla tych drugich też będę pisał $B[\alpha]$ na poziom punktu α (ta notacja nie oznacza jednak odczytu z tablicy B).

Opiszę teraz pewne rzeczy dla tablicy B, lecz mają one sens także dla tablicy A. Każdemu punktowi α (w szczególności każdej pozycji i) przypiszemy unikalną *wysokość* $w_B[\alpha]$ rosnącą zgodnie z poziomem (może to być np. para $(B[\alpha], \alpha)$ porównywana leksykograficznie). Słowa takie jak „wyżej", „niżej" będę odnosił do wysokości, a „głębiej", „płycej" do poziomów. *Minimum* lub *maksimum* jakiegoś zbioru pozycji to (wyznaczona jednoznacznie) pozycja, której wysokość jest odpowiednio najmniejsza lub największa.

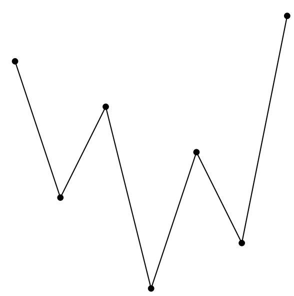
W niektórych miejscach wygodnie mi będzie „zakłamać" faktyczną wysokość pewnych punktów: dla punktu α będę pisał α^- na punkt będący w tym samym miejscu co α, ale mający wysokość mniejszą niż wszystkie punkty na tym samym poziomie.



Drzewo kartezjańskie (przerywane linie na rysunku powyżej) dla zbioru kolejnych pozycji S ma maksimum m z S w korzeniu; w lewym synu korzenia podczepiamy drzewo kartezjańskie dla pozycji z S będących przed m (o ile istnieją), a w prawym synu korzenia podczepiamy drzewo kartezjańskie dla pozycji z S będących po m (o ile istnieją). Pozycje po wzroście a przed spadkiem będą miały dwoje dzieci (po obu ich stronach są niższe pozycje), a pozycje po spadku a przed wzrostem będą liśćmi; na samym początku i na samym końcu może być potencjalnie pozycja z jednym dzieckiem. Drzewo kartezjańskie łatwo skonstruować w czasie liniowym, jednym przebiegiem od lewej do prawej (na stosie trzymamy „widoczne” pozycje, czyli takie, po których nie wystąpiła jeszcze pozycja wyższa).

Powiemy, że punkt β jest *prawym przodkiem* punktu α jeśli β jest ściśle na prawo od α oraz ściśle wyżej niż α, a żadna pozycja $x \in [\alpha, \beta]$ nie znajduje się wyżej niż β. Symetrycznie definiujemy lewych przodków. Gdy α i β są pozycjami, to β jest lewym lub prawym przodkiem pozycji α (w tym sensie) dokładnie wtedy, gdy jest jej przodkiem w drzewie kartezjańskim.

Zębem w ciągu B nazwiemy taki fragment $[\alpha, \beta]$ dla $\alpha < \beta$, że dla minimum $m \in [\alpha, \beta]$ zachodzi $w_B[\alpha] \geq w_B[\gamma]$ dla każdego $\gamma \in [\alpha, m]$ oraz $w_B[\beta] \geq w_B[\gamma]$ dla każdego $\gamma \in [m, \beta]$. W zębie najpierw mamy więc część „malejącą” $[\alpha, m]$, gdzie $w_B[\alpha]$ jest największe a $w_B[m]$ najmniejsze, a potem część „rosnącą” $[m, \beta]$, gdzie $w_B[m]$ jest najmniejsze a $w_B[\beta]$ największe. W szczególności każdy przedział $[x, x+1]$ długości 1 jest zębem. Ząb nazwiemy *lewym* jeśli $w_B[\alpha] < w_B[\beta]$, a *prawym* jeśli $w_B[\alpha] > w_B[\beta]$ (równość jest niemożliwa, bo mówimy tu o wysokościach, które nigdy nie są równe). Przykładowy lewy ząb wygląda tak:



Głębokością zęba nazwiemy $\min(B[\alpha], B[\beta]) - B[m]$, czyli różnicę poziomów między niższym z końców a minimum. Lewy ząb $[\alpha, \beta]$ nazwiemy *maksymalnym* (na jakimś przedziale) jeśli jest to najdłuższy ząb zaczynający się w α (i zawierający się w rozważanym przedziale). Symetrycznie dla prawego zęba: tym razem prawy koniec β jest ustalony.

Zauważmy, że w punkcie α zaczyna się pewien lewy ząb wtedy i tylko wtedy, gdy α ma prawego przodka. Istotnie, każdy lewy ząb zaczynający się w α kończy się w pewnym prawym przodku α. Zarazem jeśli α ma prawego przodka, to przedział od α do najbliższego prawego przodka α jest lewym zębem. Być może przedziały do pewnych kolejnych prawych przodków również. Gdy jednak pomiędzy jakimiś prawymi przodkami pojawi się element niższy niż minimum naszego zęba, to przedziały do wszystkich kolejnych prawych przodków już zębami nie są. W szczególności, minimum każdego zęba zaczynającego się w α musi być między α a najbliższym prawym przodkiem α. Wynikają z tego następujące obserwacje.

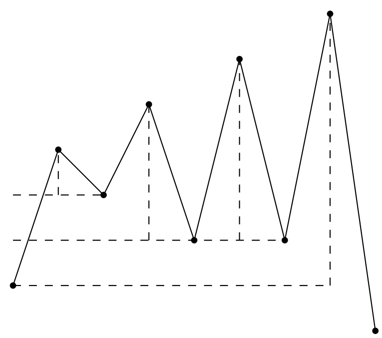
Obserwacja 1 *Każde dwa lewe zęby $[\alpha, \beta]$ i $[\alpha, \beta']$ zaczynające się w tym samym miejscu mają to samo minimum, a więc i tę samą głębokość.*

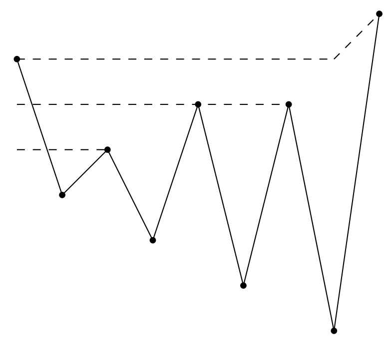
Obserwacja 2 *Jeśli bezpośrednio po maksymalnym lewym zębie $[\alpha, \beta]$ następuje lewy ząb $[\beta, \gamma]$, to minimum drugiego zęba jest niżej niż minimum pierwszego zęba; w konsekwencji, głębokość drugiego zęba jest większa lub równa głębokości pierwszego zęba.*

Lewy zębopodział (na jakimś przedziale) zaczynający się w α_0 to ciąg prawych przodków $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ taki, że maksymalny lewy ząb zaczynający się w α_i kończy się w α_{i+1}; idziemy tak aż do pozycji, która nie ma prawego przodka (na rozważanym przedziale).

Wyznaczmy dla każdej pozycji p (mającej prawego przodka) maksymalny lewy ząb zaczynający się w p (tzn. jego koniec i głębokość). Można to zrobić w czasie liniowym, w jednym przebiegu od prawej do lewej. Podczas tego przebiegu będziemy trzymać (na zasadzie stosu) aktualny lewy zębopodział zaczynający się w p. Dodatkowo dla każdego z zębów tego zębopodziału trzymamy minimum. Gdy dochodzi nowa pozycja z lewej, to zjada ze stosu część z tych zębów i tworzy nowy ząb maksymalny, który wstawiamy na początek zębopodziału. Technicznie, ten stos może faktycznie istnieć w programie, ale nie jest on potrzebny, bo bezpośrednio pod każdym elementem x na stosie i tak będzie zawsze koniec lewego zęba maksymalnego zaczynającego się w x; wystarczy więc znać szczyt stosu (tak robię w pozostałych programach).

Robiąc to, podzielmy również każdy z odcinków na *kawałki* skupiające punkty α, że maksymalny lewy ząb zaczynający się w α^- (przypomnijmy, że α^- to „wersja" punktu α znajdująca się niżej niż wszystkie punkty na tym samym poziomie) kończy się w ustalonym miejscu. Na lewym rysunku poniżej, linie przerywane dzielą lewy odcinek na kawałki. Dla punktów w pierwszym (najwyższym) kawałku, maksymalny lewy ząb sięga tylko do jego końca. Dalej mamy kawałek, z którego zęby sięgają do drugiego szczytu. Później mamy zdegenerowany kawałek (długości 0), z zębami sięgającymi do kolejnego szczytu; bez znaczenia czy uwzględnimy go w naszym podziale czy nie (zakładam, że późniejszy z punktów narysowanych na tym samym poziomie leży niżej). Zęby z ostatniego kawałka sięgają do czwartego szczytu. Prawy rysunek przedstawia analogiczną sytuację dla odcinka idącego w dół (znów jeden z kawałków jest zdegenerowany). Łączna liczba kawałków będzie liniowa, bo nowy kawałek pojawia się tylko w momencie zdejmowania zęba ze stosu.





Powyższe rzeczy symetrycznie definiujemy i robimy także dla zębów prawych. *(Obustronny) zębopodział* przedziału $[\alpha, \beta]$ definiujemy jako parę: lewy zębopodział zaczynający się w punkcie α i kończący się w maksimum tego przedziału oraz prawy zębopodział kończący się w punkcie β i zaczynający się również w maksimum tego przedziału. W tych zębopodziałach są w większości zęby maksymalne (globalnie), lecz ostatni ząb z każdej strony, idący do maksimum przedziału, może nie być maksymalny na całym ciągu, lecz jedynie na rozważanym przedziale.

Opisane do tej pory rzeczy robimy przede wszystkim dla ciągu B. Dla A możemy zrobić to samo co dla B, wystarczy nam jednak wyznaczyć obustronny zębopodział całego ciągu, co możemy zrobić osobną prostszą procedurą.

Lemat 3 *Rozważmy zębopodział ciągu A oraz zębopodział pewnego fragmentu ciągu B i zdefiniujmy następujący splot: najpierw bierzemy wszystkie lewe zęby z powyższych dwóch zębopodziałów, wspólnie posortowane niemalejąco po głębokościach, każdy ząb osobno, a następnie wszystkie prawe zęby z powyższych dwóch zębopodziałów, wspólnie posortowane nierosnąco po głębokościach, każdy ząb osobno (remisy rozstrzygamy dowolnie). Jeśli jakikolwiek splot A i rozważanego fragmentu ciągu B jest poprawnym wyrażeniem nawiasowym, to ten także.*

Dowód. Zaczynamy od jakiegokolwiek splotu dającego poprawne wyrażenie nawiasowe. Powiedzmy, że jakieś nawiasy z B są wplecione w pewien ząb $[p, k]$ z A, przed jego minimum m. Wówczas równie dobrze możemy te nawiasy przepchnąć przed ten ząb: na poziom naszego minimum m to nie wpłynie; wcześniejsze pozycje z naszego zęba z A są tylko wyżej, więc nie spadną poniżej 0; przepchnięte rzeczy z B zostaną podczepione potencjalnie wyżej niż były, ale nie niżej, bo $A[p]$ jest największe spośród pozycji w $[p, m]$.

Podobnie, jeśli jakieś nawiasy B są wplecione w pewien ząb $[p, k]$ z A po jego minimum m, to możemy je przepchnąć za ten ząb. Po tych operacjach wszystkie zęby z A są już w całości.

Następnie robimy to samo w drugą stronę: jeśli jakieś nawiasy z A są wplecione w jakiś ząb z zębopodziału B, to wypychamy je przed lub za ten ząb (zależnie czy były przed czy po minimum m tego zęba). Istotne, że fragmenty A będące razem wypychamy w całości. Zatem robiąc to dochodzimy do sytuacji, że zarówno zęby z A jak i zęby z B są w splocie w całości.

Pozostaje teraz zamieniać zęby. Jeśli jakiś prawy ząb (z jednego ciągu) jest przed lewym zębem (z drugiego ciągu), to możemy je zamienić i każdy z nich znajdzie się wyżej: prawy znajdzie się po lewym, który podnosi poziom, a lewy nie będzie po prawym, który poziom obniżał. Analogicznie, jeśli głębszy lewy ząb jest przed płytszym lewym zębem, to też możemy je zamienić: ten płytszy będzie tam gdzie wcześniej był głębszy, więc poniżej 0 nie zejdzie, a ten głębszy znajdzie się wyżej niż był. (Wszystkie nierówności opisane w tym akapicie są nieostre.) Symetrycznie, możemy uporządkować prawe zęby. Dostajemy więc porządek na zębach opisany w treści lematu. □

Obserwacja 4 *Rozważmy pewien fragment ciągu B. Istnieje jego splot z ciągiem A będący poprawnym wyrażeniem nawiasowym wtedy i tylko wtedy, gdy*

- *lewe zęby z zębopodziału A można spleść z lewymi zębami z zębopodziału fragmentu B tak, aby poziom (względem lewego końca) nie spadał poniżej 0;*
- *prawe zęby z zębopodziału A można spleść z prawymi zębami z zębopodziału fragmentu B tak, aby poziom (względem prawego końca) nie spadał poniżej 0;*
- *łączna różnica poziomów w A i naszym fragmencie B wynosi 0.*

Skupmy się na splataniu lewych zębów. Niech s będzie maksimum w A, a więc końcem ostatniego lewego zęba w zębopodziale A. Ustalmy w B punkt początkowy α. Zastanówmy się dla których prawych przodków β punktu α uda nam się spleść lewe zęby z ciągu A z lewymi zębami z podziału fragmentu $[\alpha, \beta]$ z B. W tym celu rozważmy lewy zębopodział na całym sufiksie ciągu B zaczynającym się w α. Rozdzielmy zęby tego zębopodziału na dwie grupy: te o głębokościach większych niż wszystkie (niż najgłębszy, chyba że żaden nie istnieje) z zębów z A (grupa II) oraz pozostałe (grupa I). Zgodnie z Lematem 3 najpierw spleciemy zęby z A z zębami z grupy I, a potem umieścimy zęby z grupy II. Niech spl_α będzie najniższym poziomem na splocie zębów z A i zębów z grupy I. Niech $-mini_L$ będzie najniższym poziomem w A na całym prefiksie $[0, s]$ (mamy $-mini_L \leq 0$, czyli $mini_L \geq 0$).

Lemat 5 *Przy oznaczeniach jak powyżej, możemy spleść lewe zęby z zębopodziału ciągu A z lewymi zębami z zębopodziału fragmentu $[\alpha, \beta]$ z B wtedy i tylko wtedy, gdy*

1. *$spl_\alpha \geq 0$,*
2. *$B[\beta] \geq B[\alpha] + mini_L$ oraz*
3. *każdy punkt $\gamma \in [\alpha, \beta]$ spełnia $B[\gamma] \geq B[\alpha] - A[s]$.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że powyższe warunki zachodzą. Jeśli β znajduje się w zębach z grupy II lub na granicy grup, to nie zejdziemy poniżej 0 na przeplecionych zębach z A i z grupy I (bo $spl_\alpha \geq 0$). Dzięki warunkowi 3 nie zejdziemy poniżej 0 również w żadnym punkcie γ żadnego późniejszego zęba, bo znajdzie się on na poziomie $A[s] + (B[\gamma] - B[\alpha]) \geq 0$.

Zobaczmy co dzieje się, jeśli β jest w obrębie zębów z grupy I. Aż do ostatniego wziętego kawałka z ciągu B nadal wszystko jest dobrze (mamy prefiks splotu rozważanego powyżej). Dalej mamy jeszcze trochę zębów z A. Gdyby nie było przed nimi nic z ciągu B, to sięgałyby one w dół co najwyżej na poziom $-mini_L$. Jednak wcześniej wstawiliśmy fragment $[\alpha, \beta]$ ciągu B, który podnosi nam poziom o co najmniej $mini_L$ (założenie 2), czyli ten najniższy poziom w końcówce z A na pewno będzie na poziomach nieujemnych.

Teraz implikacja w drugą stronę. Załóżmy najpierw, że $spl_\alpha < 0$, co oznacza, że jeśli wpleciemy wszystko z grupy I, to w którymś momencie poziom spada poniżej 0. Być może jednak β jest wcześniej i musimy pewien sufiks grupy I usunąć. Powiedzmy, że usuwamy zęby z grupy I po jednym, idąc od końca, a następnie być może jeden z nich skracamy. Zobaczmy, że po takich zmianach nasz splot pozostaje niepoprawny.

- Być może poniżej 0 spada pewien ząb Z z A. Jeśli usuniemy jakiś znajdujący się wcześniej maksymalny ząb z B (mający koniec nie niżej niż początek) albo skrócimy jakiś maksymalny ząb z B do krótszego zęba (a więc rosnącego o nie więcej niż oryginalny), to wszystko co jest dalej zostanie podczepione niżej niż wcześniej (ewentualnie zostanie na tym samym poziomie), więc rozważany ząb Z nadal spada poniżej 0.
- Załóżmy więc, że poniżej 0 spada pewien ząb Z z B (z grupy I), który właśnie chcemy usunąć lub skrócić.

– Czy Z mógłby być ostatnim zębem w naszym splocie zębów z A i z grupy I? Skoro jest on w grupie I, to w A znajduje się ząb Z' o tej samej głębokości i jest on w splocie tuż przed Z. Jednak Z' jest podczepiony nie wyżej niż Z (ponieważ Z znajduje się jeszcze po Z', który na pewno nie obniża poziomu). Skoro jednak Z' i Z mają tę samą głębokość, to już Z' (ząb przedostatni) spada poniżej 0.
– Załóżmy, że chcemy usunąć ząb Z. Ponieważ zęby w splocie są posortowane po głębokości, to ząb Z' znajdujący się po Z ma niemniejszą głębokość. Jak usuniemy Z, to Z' będzie podczepiony na tym samym poziomie co teraz Z, więc też będzie spadał poniżej 0.
– Być może maksymalny ząb Z chcemy skrócić do krótszego zęba. Jednak z Obserwacji 1 wiemy, że ten krótszy ząb będzie miał tę samą głębokość, więc także będzie spadał poniżej 0.

Kolejna możliwość: $B[\beta] < B[\alpha] + mini_L$. Oznacza to, że jeśli przed pozycją A będącą na poziomie $-mini_L$ wstawilibyśmy cały fragment $[\alpha, \beta]$ ciągu B, to nadal byłaby ona na poziomie ujemnym. Być może przed rozważaną pozycją A znajdzie się tylko część z tych zębów z naszego fragmentu B, ale wtedy jej poziom będzie tylko jeszcze niższy.

Ostatnia możliwość: pewien punkt $\gamma \in [\alpha, \beta]$ spełnia $B[\gamma] < B[\alpha] - A[s]$. Jeśli przed γ są wszystkie zęby z A, to γ schodzi na poziom $A[s] - B[\alpha] + B[\gamma] < 0$. Potencjalnie część zębów z A może być po γ, ale wtedy γ będzie podczepiony niewyżej (bo te brakujące zęby z A go wcześniej podnosiły), więc w tej sytuacji tym bardziej γ zejdzie poniżej poziomu 0. □

Nasz algorytm przejdzie rekurencyjnie po drzewie kartezjańskim dla B. Badając poddrzewo o wierzchołku x, badamy tak naprawdę fragment $[i, j]$ ciągu B, gdzie i to najbliższa pozycja przed x będąca jego lewym przodkiem (lub początek ciągu, gdy nie ma lewych przodków), a j to najbliższa pozycja po x będąca jego prawym przodkiem (lub koniec ciągu, gdy nie ma lewych przodków). Dla takiego fragmentu wyznaczymy:

L) dla każdego poziomu y, liczbę punktów α na poziomie y spełniających jednocześnie

   (a) $i \leq \alpha < j$,

   (b) $spl_{\alpha^-} \geq 0$,

   (c) dla każdego $\gamma \in [\alpha, j]$ oraz dla każdego γ należącego do maksymalnego lewego zęba zaczynającego się w α^- zachodzi $B[\gamma] \geq B[\alpha] - A[s]$;

P) symetryczną informację dla zębów prawych,

W) liczbę fragmentów $[\alpha, \beta]$ spełniających $i \leq \alpha < \beta \leq j$ oraz $B[\alpha], B[\beta] \leq B[x]$, które można spleść z A.

Aby wszystko ładnie się składało, w powyższej definicji L występuje α^-, czyli obniżona wersja punktu α; dzięki temu L zależy tylko od poziomu punktu α, a nie od tego jak jego wysokość porównuje się z wysokościami innych punktów na tym samym poziomie. Ząb zaczynający się w α^- (o którym mowa w warunku (c)) zwykle ma minimum przed j, ale nie musi tak być gdy α leży na odcinku $[i, i+1)$ powyżej poziomu $B[j]$.

Informacje z punktów L i P będziemy przechowywać w odpowiedniej strukturze, którą opiszę po przedstawieniu sposobu obliczania tych informacji (natomiast wynik z punktu W akumulujemy w globalnej zmiennej).

Zobaczmy najpierw, że umiemy obliczyć spl_x dla każdej pozycji x, w jednym przebiegu od prawej do lewej. Jeśli w x nie zaczyna się żaden lewy ząb, to spl_x to po prostu $-mini_L$ (minimalna wartość w A na całym prefiksie $[0, s]$). Tak samo będzie, jeśli maksymalny lewy ząb $[x, z]$ zaczynający się w x ma głębokość większą niż wszystkie zęby z A: wtedy on (i wszystkie późniejsze zęby, które są jeszcze głębsze) trafią do grupy II, a grupa I pozostanie pusta. W przeciwnym przypadku (tj. ząb $[x, z]$ trafia do grupy I) znajdujemy wyszukiwaniem binarnym w zębopodziale A ostatni ząb nie głębszy niż głębokość g_x zęba $[x, z]$ z B. Niech o_x będzie końcem znalezionego zęba (lub $o_x = 0$ jeśli takiego nie ma); jest to miejsce ciągu A, w którym wpleciemy nasz ząb $[x, z]$ zgodnie z Lematem 3. Niech $pref_x$ będzie poziomem najniższej pozycji na prefiksie A od 0 do o_x (pozycją tą jest minimum ostatniego zęba przed o_x). Można zobaczyć, że

$$spl_x = \min(pref_x, A[o_x] - g_x, B[z] - B[x] + spl_z). \tag{1}$$

Istotnie, $pref_x$ to minimum na fragmencie splotu przed zębem $[x, z]$, natomiast $A[o_x] - g_x$ to minimum na tym zębie wplecionym w odpowiednim miejscu. Jeśli minimum spl_z poprzedniego splotu (tego, uwzględniającego ciąg zębów zaczynający się w z) było osiągane po pozycji o_x, to po podniesieniu o $B[z] - B[x]$ stanie się ono minimum na dalszej części naszego splotu. Jeśli zaś spl_z wypadało w poprzednim splocie przez o_x, to z jednej strony mamy $spl_z = pref_x$, więc $B[z] - B[x] + spl_z$ i tak nie kontrybuuje do minimum w powyższym wzorze; z drugiej zaś strony również w nowym splocie część po o_x (podniesiona teraz dodatkowo przez wstawiony ząb $[x, z]$) nie będzie sięgała najniżej.

Rozważmy teraz liść x. Przede wszystkim, część W (wynik) daje 0, gdyż wszystkie poza x punkty na przedziale $[i, j]$ mają poziom większy niż x, więc w ogóle nie mamy przedziałów do rozważenia.

Zobaczmy teraz co dzieje się w części L wyniku; część P jest symetryczna. Do części L musimy uwzględnić punkty α z odcinków $[x - 1, x)$ oraz $[x, x + 1)$ (otwarte, bo punkt $x + 1 = j$ już nas nie interesuje, natomiast punkt x chcemy uwzględnić tylko raz), o ile istnieją (co nie zachodzi dla pierwszej i ostatniej pozycji). Przypomnijmy, że każdy z tych odcinków jest podzielony na kawałki, a dla każdego kawałka znamy koniec z maksymalnego lewego zęba zaczynającego się w dowolnym punkcie α^- na tym kawałku (patrz rysunek parę stron wcześniej). Rozważymy każdy kawałek osobno. Wyznaczmy w lewym zębopodziale A pozycję d, w której zaczyna się pierwszy ząb sięgający poniżej poziomu 0 (lub $d = s$, jeśli takiego zęba nie ma). Zobaczmy, że koniunkcja warunków (b) i (c) z definicji powyżej jest równoważna koniunkcji następujących warunków:

(d) głębokość g_{α^-} zęba $[\alpha^-, z]$ spełnia $g_{\alpha^-} \leq A[d]$,

(e) $B[\alpha] \leq B[z] + spl_z$.

Istotnie, zobaczmy najpierw co dzieje się, gdy $g_{\alpha^-} > A[d]$. Jeśli wówczas $d = s$, to nie zachodzi punkt (c) dla γ będącej minimum zęba $[\alpha^-, z]$. Jeśli zaś $d < s$ i nasz ząb $[\alpha^-, z]$ wstawimy do A w d lub wcześniej (czyli niżej), to zejdzie on poniżej poziomu 0, powodując $spl_{\alpha^-} < 0$. Natomiast jeśli wstawiamy go później, to ząb z A zaczynający się w d zejdzie poniżej 0 i też $spl_{\alpha^-} < 0$. Spójrzmy teraz co dzieje się, gdy $g_{\alpha^-} \leq A[d]$. W szczególności mamy wtedy $g_{\alpha^-} \leq A[s]$, co powoduje, że punkt (c) zachodzi, natomiast spl_{α^-} liczymy z wzoru (1), gdzie jako x bierzemy α^-, przy czym ząb $[\alpha^-, z]$ wstawiamy nie dalej niż w punkcie d. Sprawia to, że $pref_{\alpha^-} \geq 0$ oraz $A[o_{\alpha^-}] - g_{\alpha^-} \geq 0$ (nawet jeśli $o_{\alpha^-} < d$, to g_{α^-} nie przekracza głębokości zęba zaczynającego się w o_{α^-}, który nie schodzi poniżej 0). Wzór (1) implikuje zatem, że równoważne stają się warunki (b) $spl_{\alpha^-} \geq 0$ oraz (e) $B[\alpha] \leq B[z] + spl_z$.

Przyjrzyjmy się jeszcze raz warunkowi (d). Otóż, dla rosnącego odcinka $[x, x + 1)$ warunek ten zachodzi automatycznie, bo głębokość dowolnego zęba zaczynającego się na tym odcinku jest 0. Natomiast dla każdego kawałka malejącego odcinka $[x - 1, x)$ mamy ustalone minimum m zęba zaczynającego się w α^-, co daje nam nierówność $B[\alpha] \leq A[d] + B[m]$. Zatem tak czy inaczej warunki (d) i (e) dają nam po prostu jakieś górne ograniczenie na poziom punktu α. Do części L wyniku dodajemy po jednym punkcie dla tych poziomów rozważanego kawałka, które spełniają to ograniczenie (może to być fragment tego kawałka, ale ograniczenie może też wypaść poza kawałkiem dając cały kawałek lub zbiór pusty).

Warto (choć może nie trzeba) zauważyć też, że warunki (b) i (c) są monotoniczne: im niższy punkt α weźmiemy, tym bardziej one zachodzą. Zatem najniższe kawałki będą wzięte w całości, później jakiś kawałek w części, a kolejne już nie będą brane (każdej z tych grup może nie być). Daje to jeden przedział poziomów dodany do struktury L dla $[x-1, x)$ i również jeden dla $[x, x+1)$.

Rozważmy teraz x, który nie jest liściem. Niech i, j będą jak powyżej, a ponadto niech ℓ będzie lewym synem x, a p prawym synem x (któryś z nich może nie istnieć). Oczywiście najpierw wywołujemy się rekurencyjnie dla synów. Zobaczmy najpierw jakie nowe (tzn. nieuwzględnione w synach) fragmenty musimy uwzględnić do wyniku W. Niech $-diff$ to różnica poziomów na A; na naszym fragmencie B chcemy uzyskać różnicę $diff$.

- Przede wszystkim chcemy uwzględnić takie fragmenty $[\alpha, \beta]$, które oprócz $i \leq \alpha < x < \beta \leq j$ oraz $B[\alpha], B[\beta] \leq B[x]$ spełniają także $\alpha < x < \beta$ (możliwe tylko jeśli obaj synowie istnieją). Splatając z A będziemy rozważać fragment $[\alpha^-, \beta^-]$, jednak jest to ten sam fragment co $[\alpha, \beta]$, jedynie podział na zęby może mieć inny). W strukturze L dla lewego syna mamy takie α, że

  (a) $i \leq \alpha < x$,

  (b) $spl_{\alpha^-} \geq 0$,

  (c) dla każdego $\gamma \in [\alpha, x]$ oraz dla każdego γ należącego do maksymalnego lewego zęba zaczynającego się w α^- zachodzi $B[\gamma] \geq B[\alpha] - A[s]$.

  Jednak dla α spełniających $B[\alpha] \leq B[x]$ widzimy, że minimum maksymalnego lewego zęba zaczynającego się w α^- nie może być później niż x, zatem warunek (c) mówi równoważnie, że każdy punkt $\gamma \in [\alpha, x]$ spełnia $B[\gamma] \geq B[\alpha] - A[s]$. Jeśli dodatkowo ograniczymy się do punktów α takich, że $B[\alpha] \leq B[x] - mini_L$, to zgodnie z Lematem 5 będą to dokładnie te punkty, dla których fragment $[\alpha^-, x]$ można spleść z lewymi zębami z A. Symetryczną rzecz uzyskujemy w strukturze P dla prawego syna. Musimy więc dla każdego poziomu y przemnożyć liczbę punktów α na poziomie y z pierwszej lewej struktury oraz β na poziomie $y + diff$ z prawej struktury.

- Pozostają jeszcze przypadki szczególne. Otóż, może się zdarzyć, że prawe zęby z A da się spleść z pustym ciągiem zębów z B oraz $diff \geq \max(1, mini_L)$ (a ℓ, czyli lewe dziecko x istnieje). Wówczas punkt β może być gdzieś na odcinku $[x-1, x]$ i spełniać $B[\ell] < B[\beta] \leq B[x]$ (przez co nie był policzony w lewym dziecku, gdzie braliśmy pod uwagę tylko $B[\beta] \leq B[\ell]$). Jest po jednym takim punkcie w każdym poziomie w odpowiednim zakresie, natomiast struktura L da nam liczbę punktów α na pasującym (czyli niższym o $diff$) poziomie, dla których splot fragmentu $[\alpha^-, \beta]$ z lewymi zębami z A jest możliwy. Warunek $diff \geq mini_L$ zapewni nam, że $B[\alpha] \leq B[\beta] - mini_L$, co zgodnie z Lematem 5 jest konieczne aby splot był poprawny.

- Jeśli x ma zarówno prawe dziecko p jak i prawego przodka (którym jest wówczas j), to analogiczna sytuacja zachodzi w prawym poddrzewie: β może być gdzieś na odcinku $[j-1, j]$ i spełniać $B[p] < B[\beta] \leq B[x]$.

- Mamy też symetryczne przypadki, gdy lewe zęby z A da się spleść z pustym ciągiem zębów z B oraz $-diff \geq \max(1, mini_P)$ (gdzie $mini_P$ jest zdefiniowane symetrycznie względem $mini_L$, czyli dla części na prawo od maksimum w A).

- Dla $diff = 0$ potrzebujemy analogiczne przypadki, opisujące splot z fragmentem $[\alpha, \beta]$, dla którego $B[\alpha] = B[\beta]$ a wszystkie $\gamma \in (\alpha, \beta)$ są na ściśle niższym poziomie. Taki splot jest poprawny gdy $mini_L = mini_P = 0$. W pierwszym przybliżeniu robimy to samo co powyżej, ale tylko raz, tzn. ustalamy sobie na przykład, że ten fragment B będzie traktowany jako prawy ząb. Trzeba jednak uważać, aby nie policzyć pustych fragmentów B; one automatycznie dodają się dla każdego punktu ściśle wewnątrz malejącego odcinka, więc należy je odjąć.

Przyjrzyjmy się, jak uzyskać strukturę L dla x ze struktur L dla obu poddrzew. Otóż punkty ze struktury dla prawego poddrzewa bierzemy po prostu wszystkie. Natomiast jeśli punkt α był opisany przez strukturę dla lewego poddrzewa, to (zgodnie z definicją) musimy go usunąć jeśli dla najniższej pozycji m prawego poddrzewa mamy $B[m] < B[\alpha] - A[s]$. Innymi słowy, usuwamy wszystkie punkty na poziomach wyższych niż $B[m] + A[s]$. Symetrycznie postępujemy dla struktury P.

Pozostaje odpowiednio zdefiniować strukturę L (oraz symetryczną strukturę P). Przypomnijmy, że jej zadaniem jest przechowywanie dla każdego poziomu y liczby punktów na tym poziomie (spełniających odpowiednie warunki). Będziemy na niej wykonywać następujące operacje:

- Do każdego poziomu na danym przedziale $[y_0, y_1)$ dodaj po k punktów.
- Usuń wszystkie punkty na poziomach $\geq y_0$.
- Daj mi łączną liczbę punktów na danym przedziale $[y_0, y_1]$.
- Daj mi zawartość całej struktury w postaci (najkrótszej możliwej) listy trójek (y_0, y_1, i) mówiących, że dla każdego z poziomów w przedziale $[y_0, y_1)$ jest i punktów.

Chciałbym, aby pierwsze 3 operacje działały w czasie $O(\log n)$, a ostatnia w czasie proporcjonalnym do liczby zwróconych trójek razy $\log n$. Zrealizujemy to jako dynamiczne drzewo przedziałowe (tzn. będę tworzył tylko potrzebne węzły). W każdym wierzchołku trzymam łączną liczbę punktów w opisywanym przez wierzchołek przedziale. Liściem może być taki przedział poziomów, że dla każdego poziomu mamy tyle samo punktów.

Zobaczmy, że gdy wynikiem dla pewnego poddrzewa jest struktura L, to łączna liczba istotnych poziomów (czyli takich, na których zaczyna się lub kończy któryś z wstawionych przedziałów poziomów) jest liniowa względem jego rozmiaru.

Gdy łączymy dwie struktury L z poddrzew jakiegoś wierzchołka, to mniejszą zamieniamy na listę przedziałów (ostatnia operacja) i każdy z nich dodajemy do drugiej struktury. Licząc wynik W w tym wierzchołku również postępujemy w ten sposób: z mniejszego poddrzewa bierzemy listę przedziałów i dla każdego z nich czytamy łączną liczbę punktów na tym przedziale (odpowiednio przesuniętym) w drugiej strukturze. Ważna własność drzewa kartezjańskiego (dowolnego drzewa binarnego) jest taka, że suma po wszystkich wierzchołkach x z rozmiaru mniejszego z dwóch poddrzew zaczynających się w x jest rzędu $O(n \cdot \log n)$. Będzie więc tyle właśnie jednostkowych operacji na naszych drzewach przedziałowych. Daje to łączną złożoność $O(n \cdot \log n \cdot \log \ell)$, gdzie ℓ to długość rozkompresowanych ciągów.

Zwróćmy uwagę, że przy obecnych ograniczeniach wynik na pewno mieści się w `long long`: dla każdego możliwego początku przedziału, na który mamy 10^{11} możliwości, i dla każdego odcinka, na który mamy 10^5 możliwości, koniec może być tylko w jednym miejscu tego odcinka.

Alternatywna struktura danych. Jeśli nie chcemy korzystać z dynamicznego drzewa przedziałowego, możemy postąpić minimalnie inaczej. Mianowicie, w pierwszym przebiegu wyznaczamy tylko listy wszystkich operacji na strukturach L (wstawianie, przycinanie) i zapisujemy je na listach w poszczególnych wierzchołkach drzewa kartezjańskiego. Mając te poziomy, sortujemy je wszystkie i indeksujemy je kolejnymi liczbami naturalnymi (liczba tych poziomów jest liniowa). Wsortowujemy też od razu poziomy, dla których będzie następował odczyt przy liczeniu wyniku W; są to te same poziomy co powyżej, lecz przesunięte o *diff* (różnicę poziomów w ciągu A). Następnie robimy drugi przebieg po drzewie, wykonując już faktyczne operacje na naszych strukturach, którymi będą tym razem zwykłe drzewa przedziałowe w tablicy (liście to kolejne indeksy poziomów z naszej listy). Każde z nich ma rozmiar liniowy, proporcjonalny do liczby wszystkich poziomów z listy. To nie jest problem, bo te same drzewa przedziałowe używamy wielokrotnie. Czyszczenie drzewa przedziałowego przed użyciem w kolejnym miejscu robimy operacją przycięcia na samym początku, co sprowadza się do oznaczeniu w korzeniu, że drzewo jest puste. Jeśli w każdym wierzchołku drzewa kartezjańskiego schodzimy najpierw do większego poddrzewa, a potem do niższego, to łączna liczba drzew przedziałowych potrzebnych równocześnie jest logarytmiczna. Zatem zużycie pamięci pozostaje rzędu $O(n \cdot \log n)$; w praktyce sięga 300 MB, czyli jest zauważalnie większe niż w rozwiązaniu z dynamicznym drzewem przedziałowym.