JOI 2025/2026 ファイナルステージ
Day 3 「三角形降雨」

解説担当：西本将樹（maspy）

問題概要

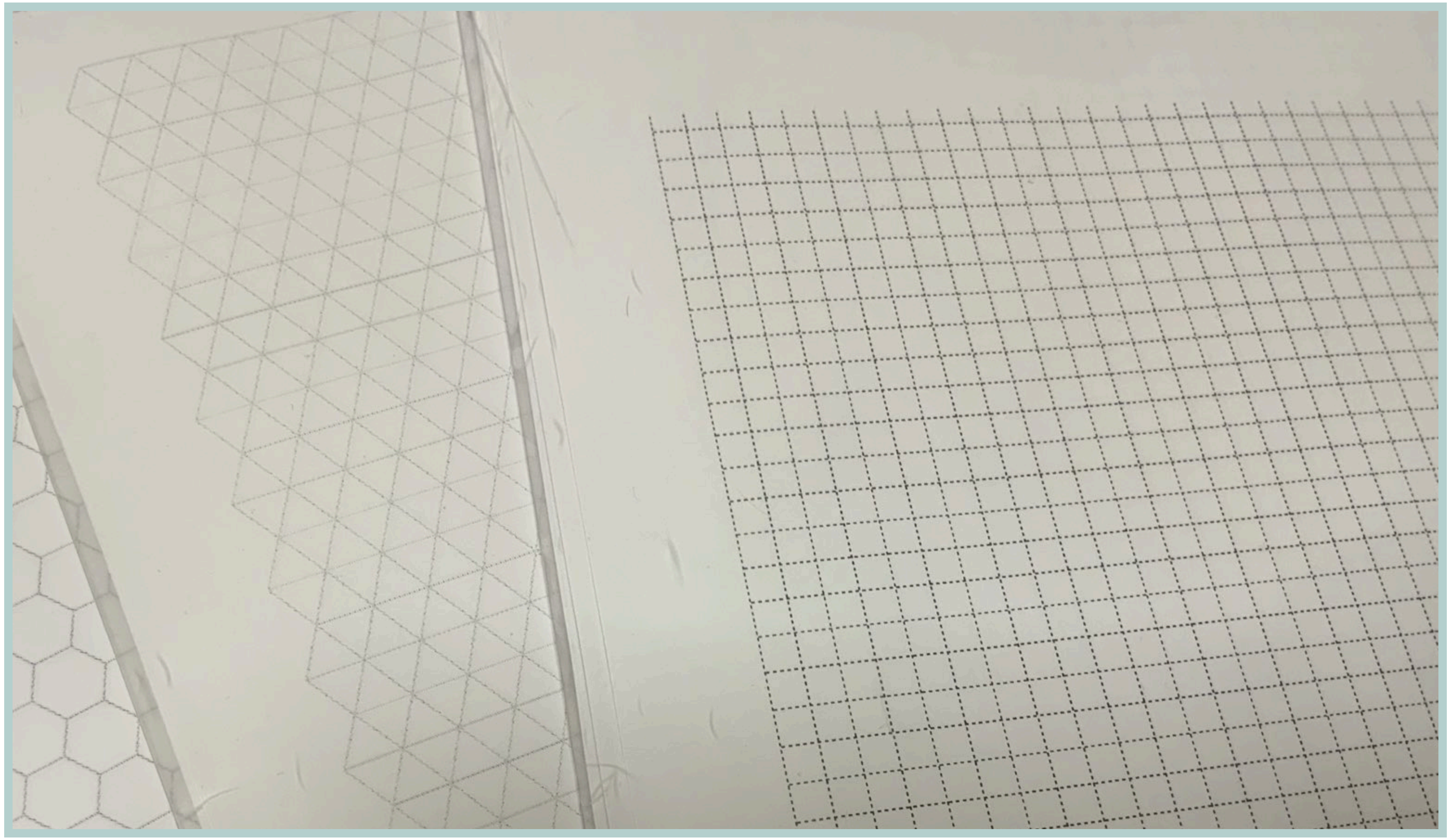
- 正三角形グリッドがある（無限に続くとしてよい）
- 正三角形領域へのインクリメントが来る．
- k 以上となった部分の面積を求める（$k = 1, 2, 3, 4, 5$）．

問題文の図を参照．

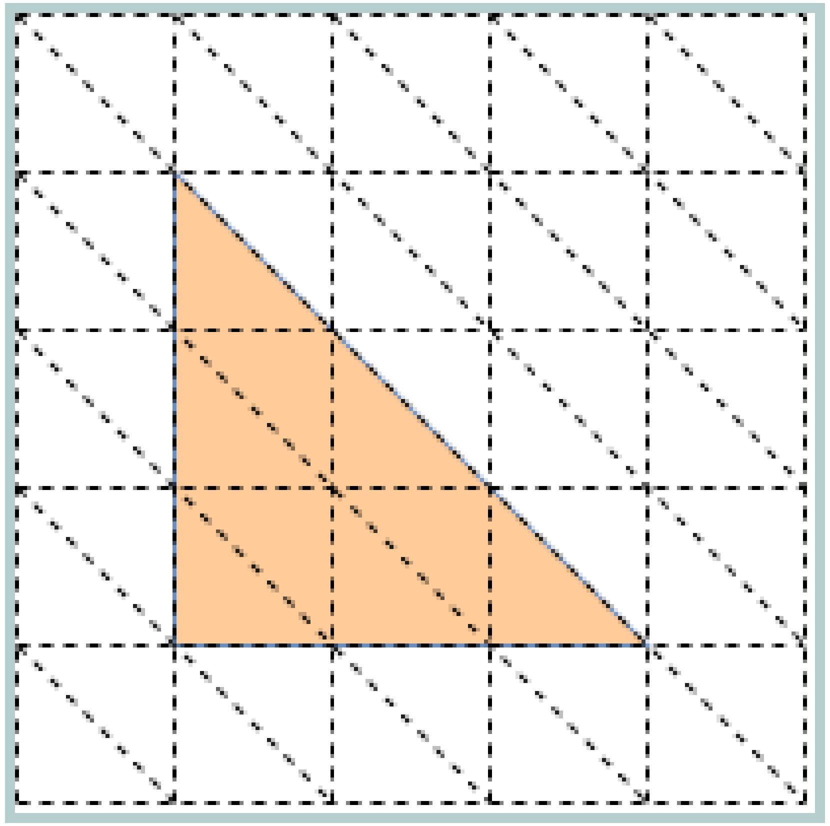
正三角形グリッドについて

- 持ち込み自由コンテスト：専用の用紙を持っておくと役に立つことがあります．
- 持ち込みなしコンテスト：作図が下手な人は，**線形変換**により，斜交座標を通常の直交座標に置き換えてしまうことも有効だと思います．
- ただし，鏡像原理などが見えにくくなるリスクはあります．

さまざまなグリッド用紙



直交座標への置き換え



解説もこの形式でやります.

小課題 1 ($N=2$)

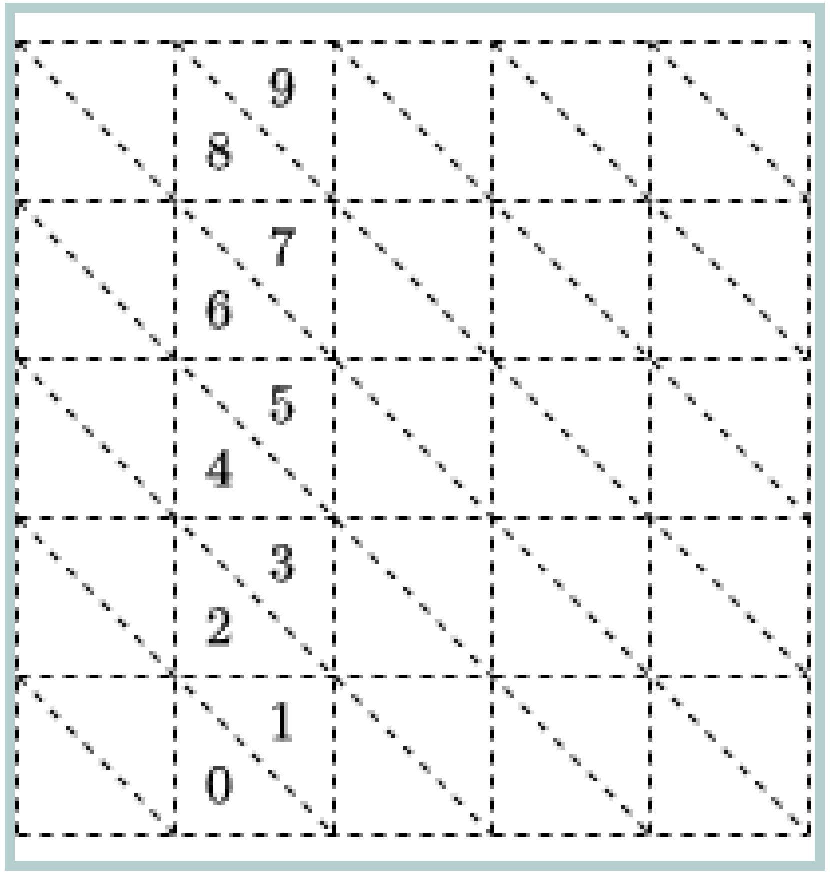
- 共通部分の面積を求めるという幾何問題です.
- 正三角形は $a_i \le x, b_i \le y, x+y \le c_i$ の形.
- その共通部分も，$a \le x, b \le y, x+y \le c$ の形.
- 平行移動すると，$0 \le x, 0 \le y, x+y \le c$ の形.
- c の符号で場合分けして終了.

後続の小課題群のランダムテスト等の助けになりにくいので，小課題 4 あたりまで解ける見込みがあるならスキップするのもよいでしょう.

小課題 2 ($L \le 100, N \le 100$)

- 愚直解.
- T_i 内のすべての区画の座標を列挙して，足すだけです.
- 「区画の座標」をどうするか？
  - 方法 1：上向きの三角形と下向きの三角形に分けて処理する.
  - 方法 2：両方の向きの三角形全体にいい感じの番号を付ける.

小課題 2 ($L \leq 100, N \leq 100$)



- 方法 2：両方の向きの三角形全体にいい感じの番号を付ける．

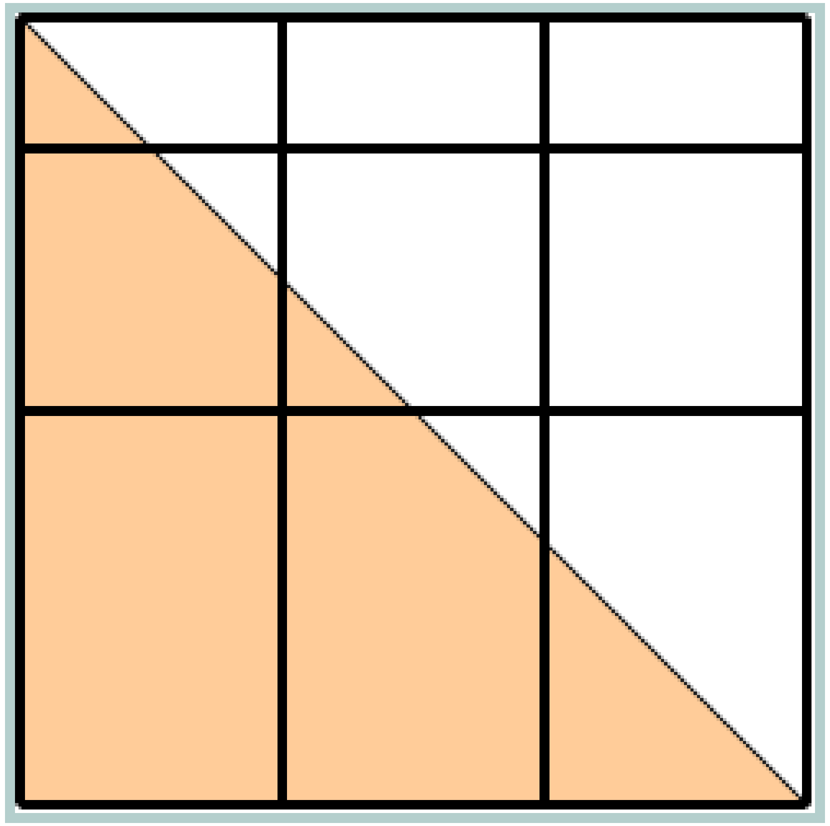
小課題 3 ($L \leq 1000$)

- 区画の個数は $O(L^2)$ なので，すべての区画に対する頻度を求める解法を考えられます．
- 累積和（imos 法）などを用いて高速に足せばよいです．
- $O(NL + L^2)$ でも十分高速です．x は愚直にループして，y 方向には区間加算とすると簡単です．
- 複数方向の累積和を頑張ることで $O(N + L^2)$ にもできます．今回の出題では不要な処理です．

小課題 4 ($N \leq 2000$)

- 座標圧縮を考えましょう.
- 「交点に現れる座標」をすべてとろうとすると，座標の種類が大きくなってしまいます.
- 単に，a_i の集合や b_i の集合で区切ってみます.

小課題 4 ($N \leq 2000$)



小課題 4 ($N \leq 2000$)

- $O(N^2)$ 個の長方形領域に分割．
- T_i は，いくつかの長方形を完全に覆い，いくつかの長方形を部分的に覆う．
- 前者のパターンは小課題 3 と同様にできる．
- 後者のパターンは T_i ごとに $O(N)$ 個．これを適切に処理すればよい．ちょっと面倒にはなると思います．

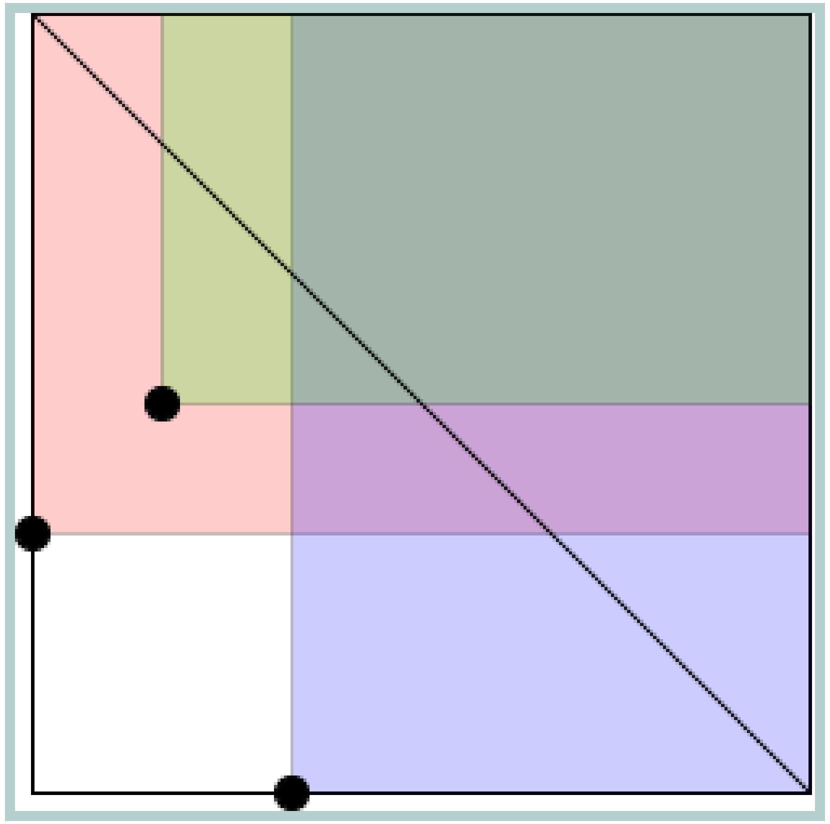
小課題 5，小課題 6 ($X_i = 0$)

- 回転して，制約を $X_i + Y_i + Z_i = L$ として解説します．
- T_i は領域 $[a_i, \infty) \times [b_i, \infty) = \{(x, y) \mid a_i \leq x, b_i \leq y\}$ のうちで $x + y \leq L$ を満たす部分．と考えることができます．

小課題 5，小課題 6 ($X_i = 0$)

- まずは，$x + y \leq L$ という条件を無視した上で，領域 $[a_i, \infty) \times [b_i, \infty)$ が k 個以上重なる部分を求めます．
- $O(NK)$ 個の矩形領域が登場．
- それぞれについて，その中で $x + y \leq L$ を満たす部分の面積を求めて，答に加算すればよいです．

小課題 5，小課題 6 ($X_i = 0$)



小課題 7，小課題 8，小課題 9

- T_i は $a_i \leq x, b_i \leq y, x + y \leq c_i$ という領域です．
- このうち $x + y \leq c_i$ という条件を無視すれば，「k 個以上重なっている領域」は簡単に表せることが分かりました．
- この考え方をもとに，$x + y = c$ を scan line として処理するというタイプの解法を考えます．

小課題 7，小課題 8，小課題 9

次のような解法が可能です．

- T_i を c_i について降順ソートして，ひとつずつ追加していきます．
- 各時点での答を保持します．（答は，$c_i \leq x + y$ の部分の面積だけを考慮する**のではありません**）．
- T_i の追加のたびに，答を差分更新します．

小課題 7，小課題 8，小課題 9

- T_i の追加のたびに，答を差分更新します．
- この際，$x + y \leq c_i$ である部分での重複個数だけが問題です．
- したがってこの目的のためには，T_i を領域 $[a_i, \infty) \times [b_i, \infty)$ に置き換えてしまってもよいです．

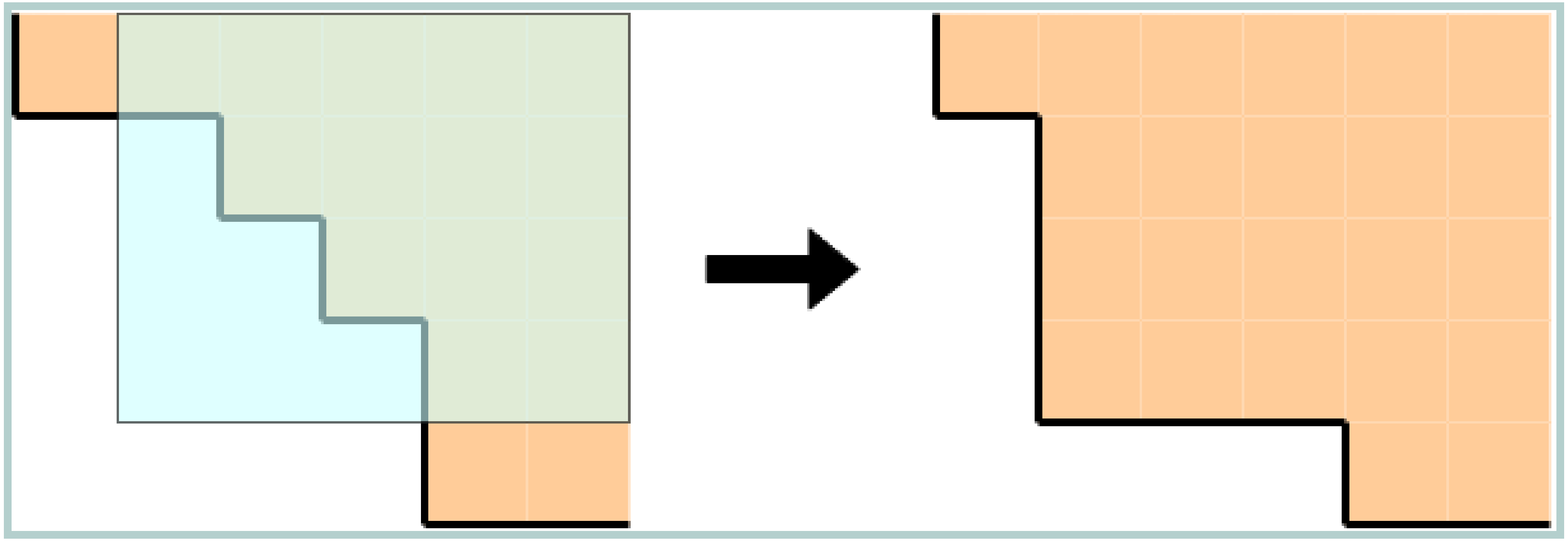
小課題 7，小課題 8，小課題 9

- 結局，次をやればよいということになります．
- 長方形 $[a_i, \infty) \times [b_i, \infty)$ の多重集合を適切に管理する．
    - 追加するたびに，$0, 1, \ldots, K$ 個が重なっている部分がどう変化したかを取得できるようにする．
- 個数が変化した部分について，$x + y \leq c_i$ を満たす部分の面積を求めて，答を差分更新する．

小課題 7 ($K = 1$)

- 小課題 7 では，長方形 $[a_i, \infty) \times [b_i, \infty)$ の和集合を管理すればよいです．
- 列の問題に言い換えると次のようになります．
  - 列 $(h_0, h_1, h_2, \ldots)$ がある．すべて ∞ で初期化されている．
  - $h_i, h_{i+1}, h_{i+2}, \ldots$ に対して $h_j := \min(h_j, x)$ というタイプのクエリが来る．
  - クエリのたびに h がどう変わったかを報告する．
- h は単調減少列になっていて，これを定値区間列として管理すると，全体で $O(N)$ 回の区間変更という形になります．

小課題 7 ($K = 1$)



小課題 8，小課題 9 （満点解法）

- 実装は難化しますが，$K = 5$ になってもやることは変わりません．
- $k = 1, 2, \ldots, K$ に対して「k 個以上重なっている部分」は，やはり単調減少列により表されます．これらを定値区間列として管理して，それぞれ $O(N)$ 回の区間変更という形で処理すればよいです．
- 定数倍が悪くなければ満点，悪ければ小課題 8 ということになると思います．
- 定数倍に苦戦した場合：set の代わりに，座標圧縮して 64 分木を用いるなど．