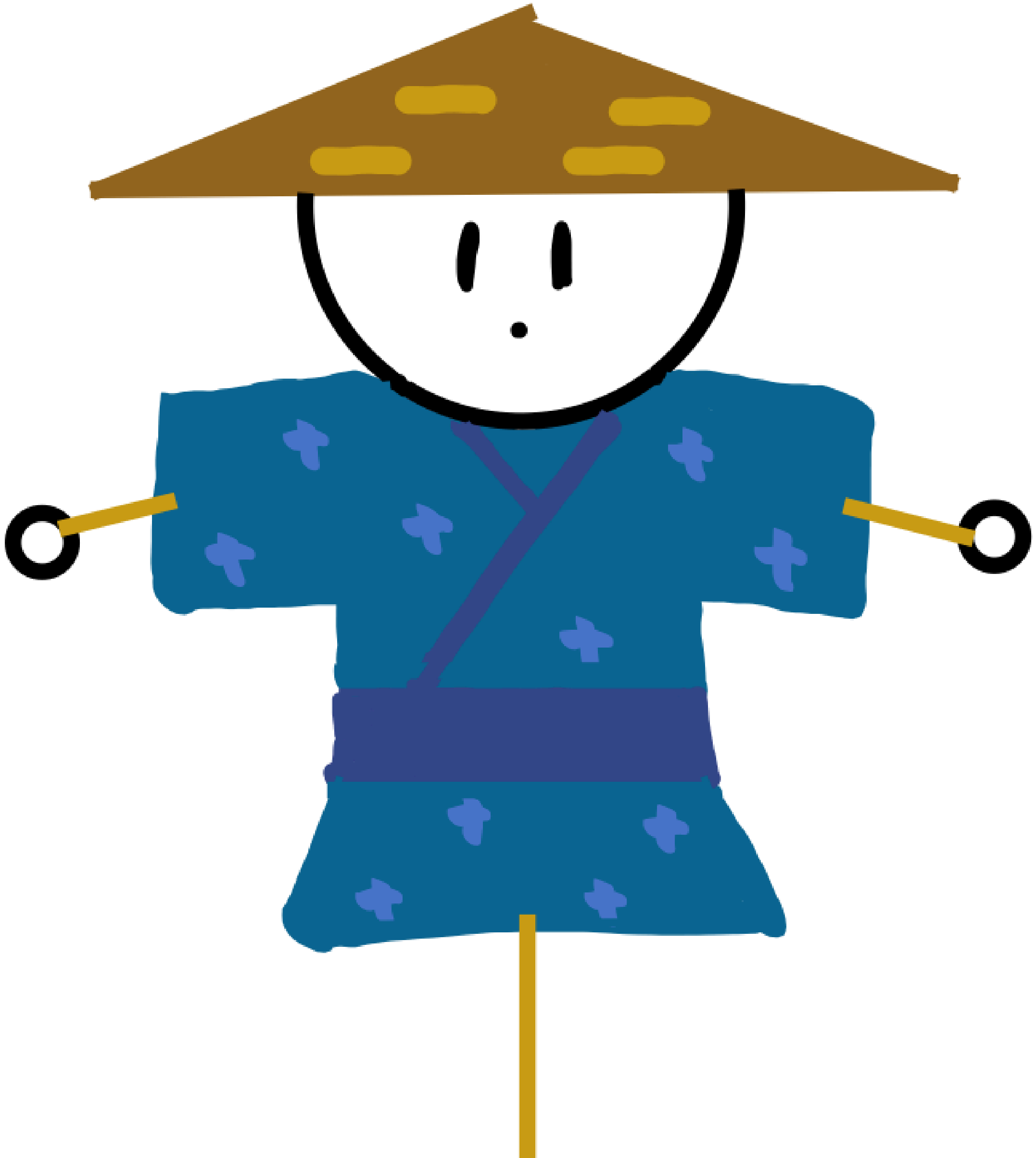
JOI 2025/2026 ファイナルステージ Day 3 かかし 2 (Scarecrow 2) 解説

解説担当 : iro_



問題概要

- xy 座標平面上に N 体のかかしがいる。
それぞれのコストは C_i であり、
    - $T_i = 1$ のとき、かかしは点 (X_i, Y_i) より $x \leqq X_i$ の領域を守る
    - $T_i = 2$ のとき、かかしは点 (X_i, Y_i) より $x \geqq X_i$ の領域を守る
    - $T_i = 3$ のとき、かかしは点 (X_i, Y_i) より $y \leqq Y_i$ の領域を守る
    - $T_i = 4$ のとき、かかしは点 (X_i, Y_i) より $y \geqq Y_i$ の領域を守る
- すべての点を K 体以上のかかしで守るために必要な合計コストの最小値を求めよ。

配点 (JOI)

番号	配点	制約	計算量の例
1.	-- 点	$K = 1,\ T = 2$	
2.	4 点	$K = 1$	
3.	6 点	$K \leqq 2$	
4.	-- 点	$N \leqq 15$	
5.	11 点	$N \leqq 300$	$O(NK^2)$
6.	27 点	$N \leqq 6\,000$	$O(NK)$
7.	19 点	$N \leqq 75\,000$	
8.	33 点	$N \leqq 200\,000$	$O((N+K)\log N)$

配点 (JOIG)

番号	配点	制約	計算量の例
1.	5 点	$K = 1,\ T = 2$	
2.	7 点	$K = 1$	
3.	7 点	$K \leqq 2$	
4.	22 点	$N \leqq 15$	
5.	35 点	$N \leqq 300$	$O(NK^2)$
6.	24 点	$N \leqq 6\,000$	$O(NK)$
7.	-- 点	$N \leqq 75\,000$	
8.	-- 点	$N \leqq 200\,000$	$O((N + K) \log N)$

小課題 1 $(K = 1, T \leqq 2)$

- $T_i = 1$ のとき、かかしは点 (X_i, Y_i) より $x \leqq X_i$ の領域を守る
- $T_i = 2$ のとき、かかしは点 (X_i, Y_i) より $x \geqq X_i$ の領域を守る

$\Longrightarrow$ Y_i 座標は関係ない

ある地点 (x, y) を守るためには、

- $T_i = 1$ のかかし $x \leqq X_i$ が存在するか
- $T_i = 2$ のかかし $x \geqq X_i$ が存在するか

特に
点 $(-\infty, 0)$ を守ることができるのは $T_i = 1$ のかかし
点 $(\infty, 0)$ を守ることができるのは $T_i = 2$ のかかし

$\implies T_i = 1$ のかかしと $T_i = 2$ のかかしは少なくとも一体ずつ必要

ある i, j について $T_i = T_j = 1$ かつ $X_i \leqq X_j$ であるとき

i 番目のかかしが守る領域は j 番目のかかしが守る領域に完全に含まれているため、i 番目のかかしは必要ない

$\implies T_i = 1$ を満たすかかしは複数体必要ない

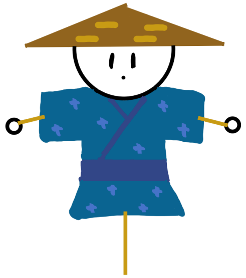
よって
条件を満たす (i, j) 組は

$$T_i = 1 \text{ かつ } T_j = 2 \text{ かつ } X_j \leq X_i$$

このとき、求める合計コストの最小値は

$$\min(C_i + C_j)$$

小課題 2 $(K = 1)$



- $T_i = 3$ のとき、かかしは点 (X_i, Y_i) より $y \leqq Y_i$ の領域を守る。
- $T_i = 4$ のとき、かかしは点 (X_i, Y_i) より $y \geqq Y_i$ の領域を守る。

$\implies X_i$ 座標は関係ない。

点 $(-\infty, -\infty)$ を守ることができるのは $T_i = 1$ または $T_i = 3$ のかかし
点 $(-\infty, \infty)$ を守ることができるのは $T_i = 1$ または $T_i = 4$ のかかし
点 $(\infty, -\infty)$ を守ることができるのは $T_i = 2$ または $T_i = 3$ のかかし
点 (∞, ∞) を守ることができるのは $T_i = 2$ または $T_i = 4$ のかかし

小課題 1 と同じように考察すると　計画を 2 つ実行し、実行する計画を　計画 i、計画 j とすると、(i, j) は

- $T_i = 1$ かつ $T_j = 2$ かつ $X_j \leq X_i$
- $T_i = 3$ かつ $T_j = 4$ かつ $Y_j \leq Y_i$

のどちらかを満たせばよいと分かる

よって答えは満たす (i, j) の組は

$$T_i = 1 \text{ かつ } T_j = 2 \text{ かつ } X_j \leq X_i$$

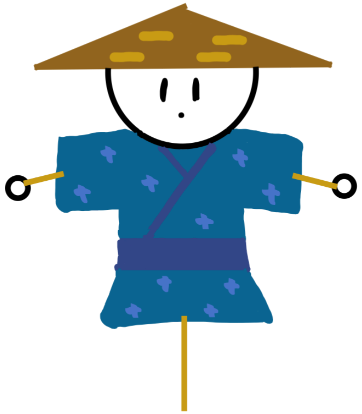
または

$$T_i = 3 \text{ かつ } T_j = 4 \text{ かつ } Y_j \leq Y_i$$

合計コストの最小値は

$$\min(C_i + C_j)$$

小課題 3 ($K \leqq 2$)



結局すべての点を 1 体以上のかかしで守るためには計画を 2 つ実行すればよい
実行する計画を　計画 i、計画 j とすると、(i, j) は

- $T_i = 1$ かつ $T_j = 2$ かつ $X_j \leq X_i$ を満たす
- $T_i = 3$ かつ $T_j = 4$ かつ $Y_j \leq Y_i$ を満たす

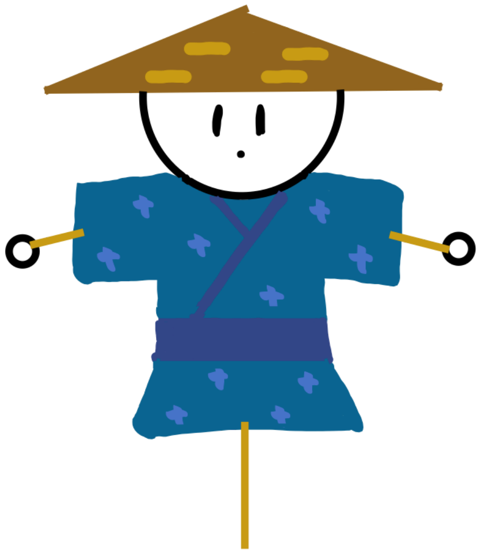
のどちらかを満たせばよいと分かる

実装では $T_i = 1$ のかかし、$T_i = 2$ のかかしを走査し合計コストが小さい 2 組を求めたらよい
実装では 2 組挙げる時に重複しないように気を付けましょう

これを $T_i = 3, 4$ のかかしについても同様に行う

求めた 4 組のうち合計コストが小さい 2 組を選ぶと答えが求まる

小課題 4 $(N \leq 15)$



$\boldsymbol{T_i = 1, 2}$ と $\boldsymbol{T_i = 3, 4}$ は独立なので今後は分けて考える

$T_i = 1, 2$ のみですべての点を k 体以上のかかしで守るとき、
$T_i = 1$ の計画を t 個、$T_i = 2$ の計画を t 個実行するのが最適

仮に $T_i = 1$ のかかしが k 個未満であれば、$(-\infty, y)$ の点は k 個にカバーされない
仮に $T_i = 1$ のかかしが $k + 1$ 個以上であれば、その中で X_i の大きい k 個を残しても「条件が満たされているかどうか」は変わらない

$T_i = 2$ についても同様

しかし、この k 個のかかしの並びも重要
左から順に 111...1222...2 と並んでいたら、誰も真ん中を守らない

具体的には、どの prefix についても $T_i = 2$ の数が $T_i = 1$ の数以上である

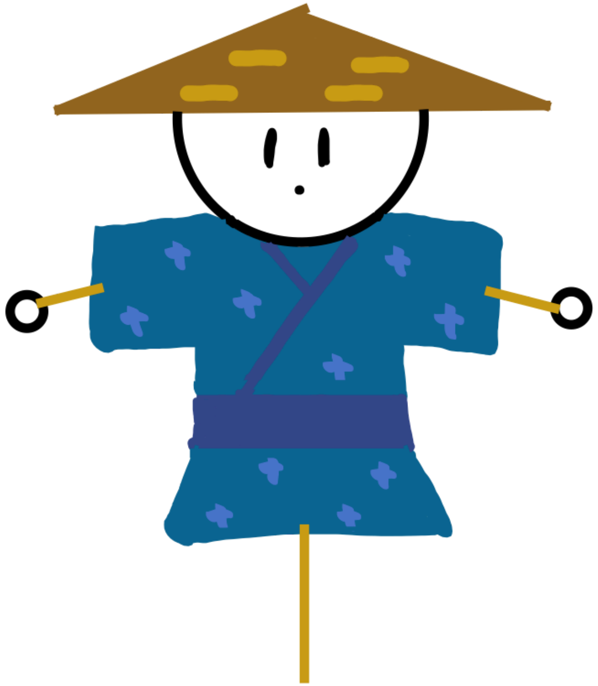
計画の数が少ないのでどの計画を実行するか全探索し、$O(N)$ かけて判定する

計算量は $O(2^N N)$ 時間

かかしがすべての点を守るためのまとめ

- $T_i = 1, 2$ を用いて k 体以上のかかしで守るとき、$T_i = 3, 4$ ではを $K - k$ 体以上のかかしで守ればよい
- $T_i = 1$ の計画を t 個、$T_i = 2$ の計画を t 個実行するのが最適
- どの prefix についても $T_i = 2$ の数が $T_i = 1$ の数以上である

小課題 5 ($N \leq 300$)



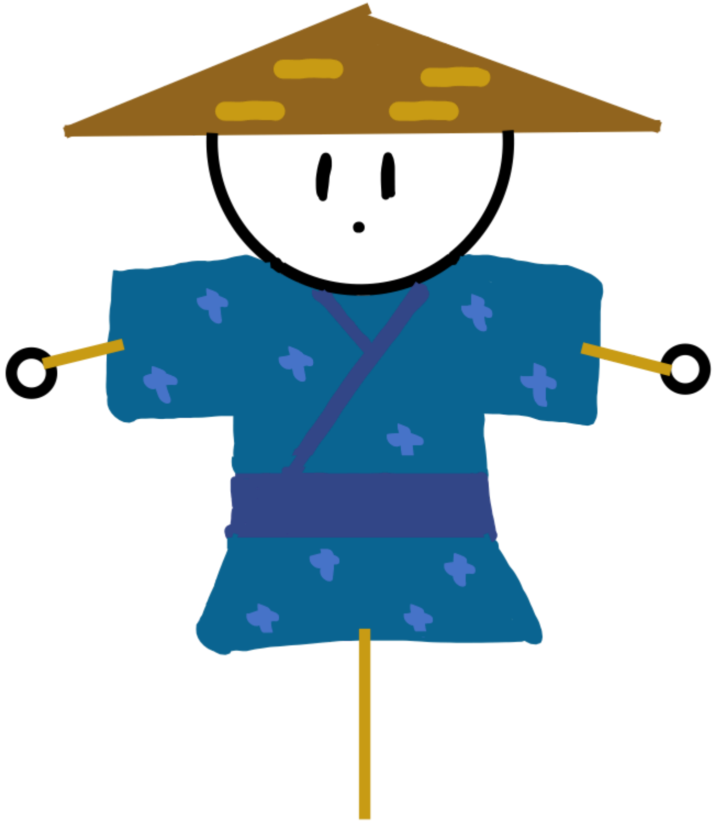
小課題 4 の方針を高速化させたいので動的計画法に落とし込む

$dp[t][s]: T_i = 1$ の計画を t 個実行し $T_i = 2$ の計画を s 個実行したときの合計コストの最小値

X_i をソートし、左から順にみていく。

$O(NK^2)$ 時間で解ける

小課題 6 ($N \leq 6\,000$)



かかしがすべての点を守るための条件

- $T_i = 1$ の計画を t 個、$T_i = 2$ の計画を t 個実行するのが最適
- どの prefix についても $T_i = 2$ の数が $T_i = 1$ の数以上である

分かりやすく

$T_i = 1$ の計画を t 個、$T_i = 2$ の計画を s 個実行する

このとき、

- 座標が小さい順に数えると常に $t \leqq s$
- 最後には $t = s$

見覚えのある条件ですね

これは「良い括弧列」である条件と同値

$T_i = 1$ を $)$ とし、$T_i = 2$ を $($ とする

すべての点を守るかかしの最小数を 1 増やすことと括弧列に$()$を追加することは同値

1212 は"()()"

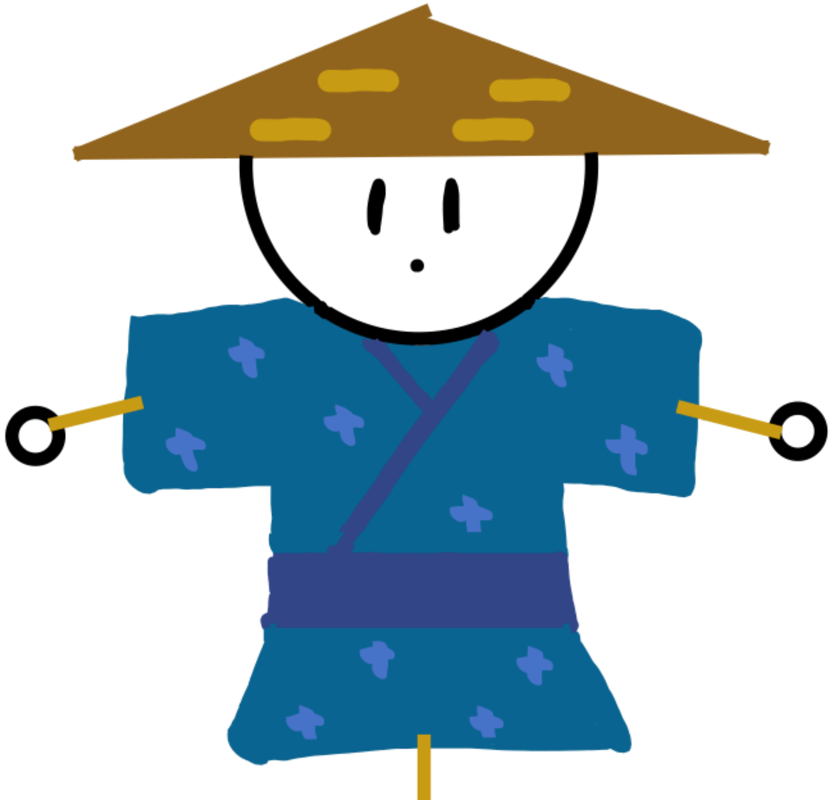
1122 は "(())"

(を $+1$，) を -1 として　累積和を取ると、括弧列の条件を満たすかどうかは累積和の最小値が 0 以上であるかどうかで判定できる

新たに () を追加するときは制約はなく
)(を追加するときは、累積和が 0 のところを跨がなければよい

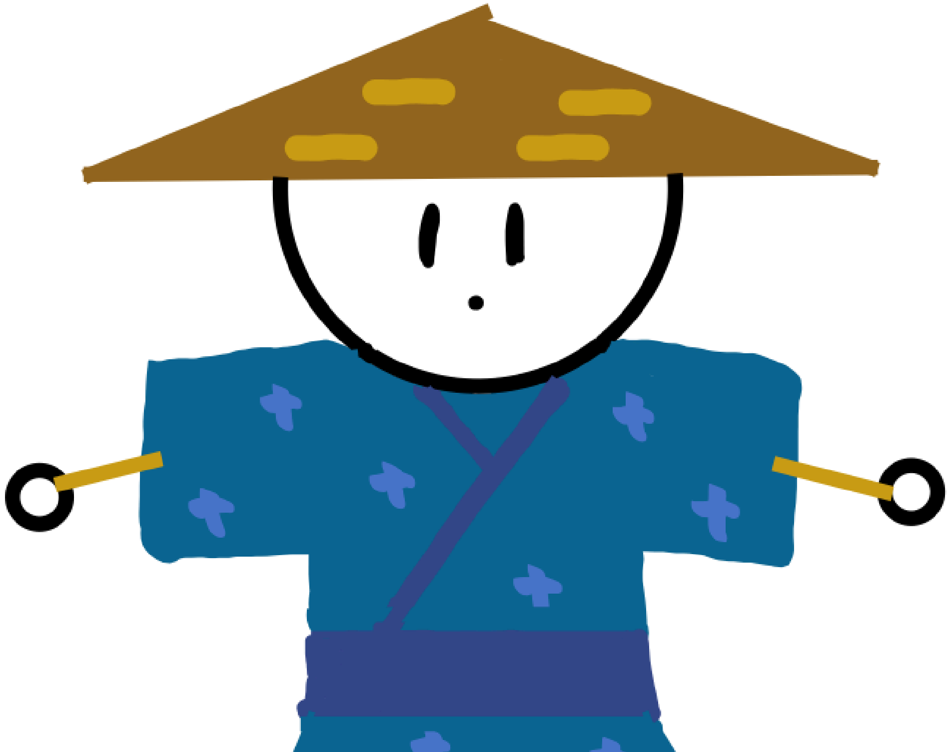
$O(NK)$ 時間

小課題 7 ($N \leqq 75\,000$)



小課題 8 の $O((N+K)\log N)$ 時間に定数倍色々つけて

小課題 8 $(N \leqq 200\,000)$



これを遅延セグメント木に乗せて高速させたい

括弧列であることと、開き括弧、閉じ括弧の完全マッチングが可能というのは同値
その貪欲は最小費用流が貪欲で求まることと対応する

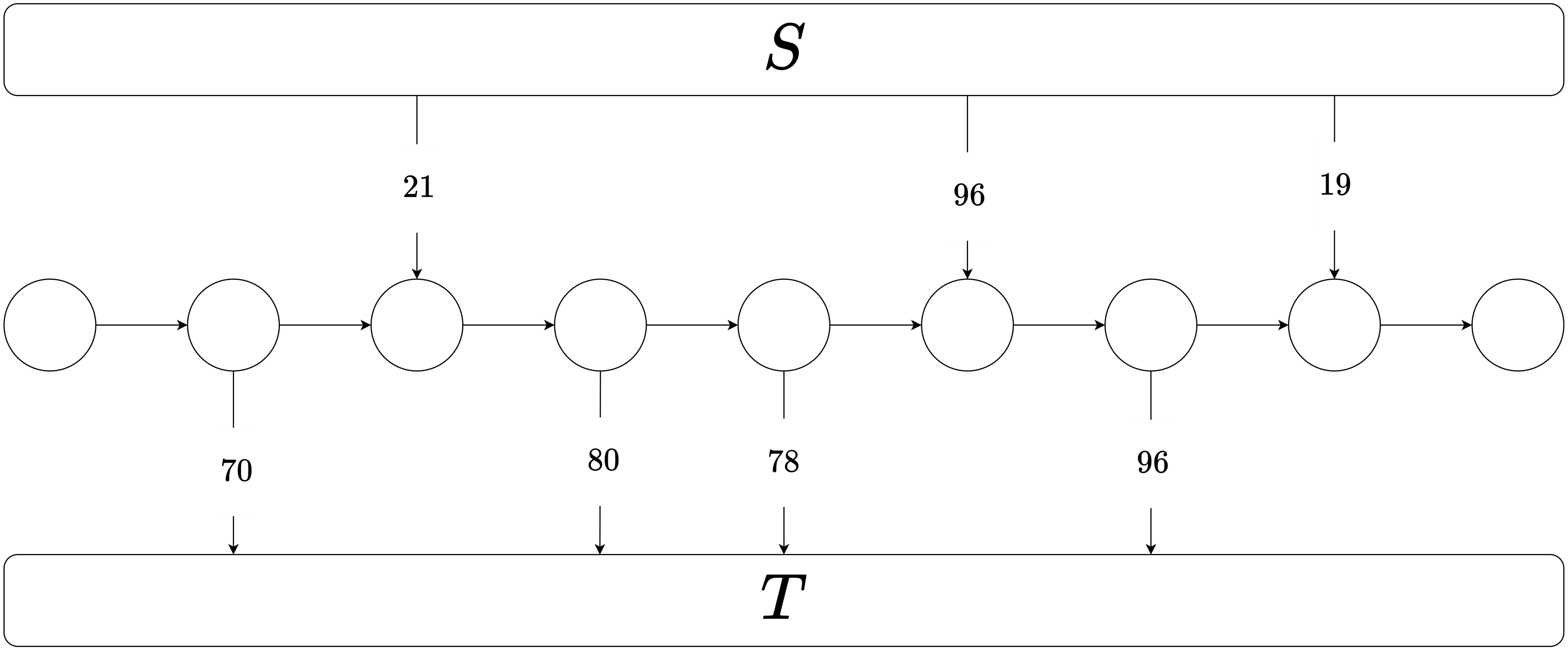
フローの問題に定式化させます
path に流す = 括弧列に 2 個追加

- グラフ
  頂点 $S, 1, 2, \ldots, 2N, T$
  i → i+1 に容量 ∞ かつコスト 0 の辺がある
  i+1 → i に容量 0 かつコスト 0 の辺（逆辺）がある
- 流す場所の探し方
  (→) は無条件
) → (は、逆辺の流量が正になっているところだけたどれる

- 流し方
  開きかっこから閉じかっこに流す
  流す場所を見つけたあとの処理
  (→) なら逆辺の容量が +1 される
) → (（これは逆辺の容量が全部正のときだけ可能）なら逆辺の容量が -1 される

フローは最短路反復で解ける
(証明が気になる方は「最短路反復　最小費用流」で検索してください)

サンプル 1



実装では累積和($= C_i$)をマージするときに C_i が 1 以上であるかではなく、
$C_i > \min C$ を持ちます

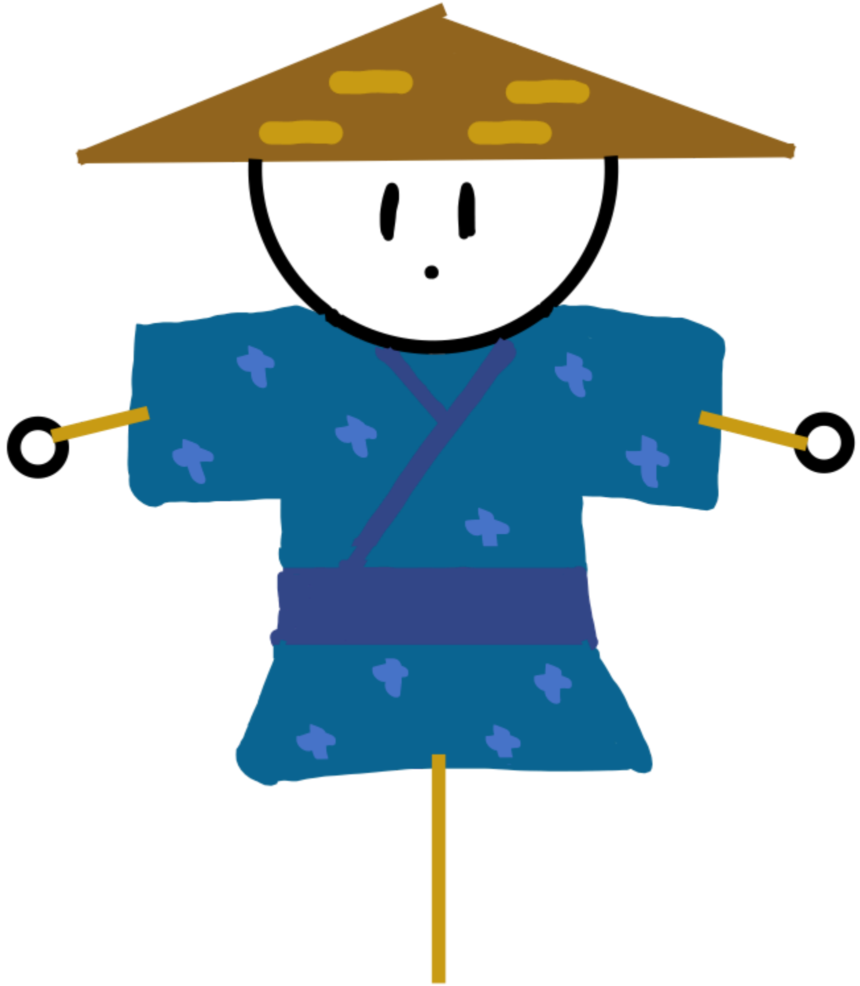
おまけ

$k = 1, 2, \ldots, K$ についてすべての点を k 体以上のかかしで守ると考えると

1 次元において解が下に凸なので　min-plus convolution できるので毎回最も小さい組を探せばよい

JOI 得点分布

得点	人数	累積
100	1	1
48	5	6
21	14	20
15	1	21
11	2	23
10	2	25
4	3	28
0	2	30



JOIG 得点分布

得点	人数	累積
100	0	0
41	1	1
34	2	3
19	1	4
12	10	14
5	1	15
0	0	15