JOI 国のお祭り事情 3

Festivals in JOI Kingdom 3

平木 康傑

JOI/JOIG チューター

2026/03/24 (Contest 4)

問題概要

問題文

N 頂点の無向木がある．各頂点 v に人気度 C_v, 各辺 e に長さ D_e が設定されている．頂点 v が点火する時刻は以下のように決まる．

- $C_v = 0$ の場合，0．
- $C_v \geq 1$ の場合，隣接する頂点 u に対する「(頂点 u の点火時刻) + (辺 (v, u) の長さ)」のうち C_v 番目に小さい値．

Q 個のクエリを順に処理せよ．クエリは以下の 3 種類．

1. 頂点 v の人気度 C_v を x に変える．
2. 辺 e の長さ D_e を x に変える．
3. 現在の状態の木において，頂点 v が点火する時刻を求める．

制約: $N, Q \leq 1.5 \times 10^5$, $D_e \leq 10^6$

用語の定義

通常の (要素の重複を許さない) 集合 $\{\cdot\}$ に対し，多重集合 (要素の重複を許す) を $[\cdot]$ で表す．
非負整数および $+\infty$ からなる多重集合 S と非負整数 k に対し，関数 $\mathrm{kth}(S,k)$ を以下で定める．

$$\mathrm{kth}(S,k) := \begin{cases} 0 & (k=0) \\ S \text{ の要素のうち } k \text{ 番目に小さい値} & (1 \le k \le |S|) \\ +\infty & (k > |S|) \end{cases}$$

この表記を使うと，頂点 v の点火時刻を $x_v^\top$ とおいたとき

$$x_v^\top = \mathrm{kth}\left(\left[\, x_u^\top + D_e \mid \text{頂点 u, v は辺 e で隣接している} \,\right], C_v\right)$$

と書ける．

小課題 1 ($N, Q \leq 2\,000$) - 愚直解法

パレードが頂点に着く時刻を随時 priority queue に入れていき，「頂点に来たパレードが C_v 個に達した時点で隣接頂点にパレードを飛ばす」をシミュレーションする解法が考えられる．$O(NQ \log N)$ 時間で，小課題 1 に通る (6 点)．

小課題 1 ($N, Q \leq 2\,000$) - 木 DP による解法

各頂点の点火時刻が相互に影響しあっていて，そのままでは愚直解から発展させにくい．影響が一方的であってほしい．
実は以下の考察が成り立つ．

考察 1 (上から降りる方向は無視してよい)

頂点 r を根とする根つき木として見たとき，頂点 v の点火時刻 x_v を

$$x_v = \mathrm{kth}\left(\left[\ x_u + D_e \mid \text{頂点 u は v の子であり，辺 e で隣接している}\ \right], C_v\right)$$

として求めたとき，r の点火時刻 x_r は真の点火時刻 $x_r^\top$ と等しい．

これにより，子からボトムアップに点火時刻を求める木 DP が正当とわかる．毎クエリで木 DP をおこなっても $O(NQ\log N)$ 時間で，小課題 1 には通る (6 点)．

小課題 1 ($N, Q \le 2\,000$) - 木 DP による解法 (補足)

頂点 v に隣接する頂点 u のうち，$x_u^\top + D_{(v,u)}$ が小さいほうから C_v 番目以内であるような u に対して，辺 (v,u) に向き $u \to v$ をつける．

補題 1.1

どの辺も高々 1 方向にしか向きがつかない．
(証明概略) 辺 (v,u) に両方の向きがついたとすると，向き $u \to v$ から $x_u^\top + D_{(v,u)} \le x_v^\top$ が，向き $v \to u$ から $x_v^\top + D_{(u,v)} \le x_u^\top$ が成り立つはずだが，$D_{(v,u)} = D_{(u,v)} > 0$ よりこの 2 式は矛盾．よって背理法より示された．

補題 1.2

任意の頂点 u について，$x_u \ge x_u^\top$．特に，u が根であるか，u の親 v に対して辺 (v,u) が向き $v \to u$ を持たないようなとき，$x_u = x_u^\top$．
(証明概略) 根つき木の頂点数に対する数学的帰納法が回る．

考察 1 は補題 1.2 の系．

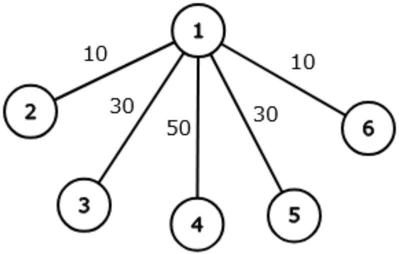
小課題 2 (スターグラフ) - kth の更新を高速に行う

木がスターグラフであり，質問クエリは頂点 1 のみに与えられるときを考える．

多重集合 S に対して以下のことができるデータ構造があればよい．

- 要素の追加・削除 (葉の人気度の変更に相当)，変更 (辺の長さの変更に相当)
- 与えられた k に対する $\mathrm{kth}(S, k)$ の取得 (根の人気度の変更に相当)

これは動的セグメント木上の二分探索や PBDS などによって実現できる．
動的セグメント木による実装でクエリあたり $O(\log A)$ 時間 ($A := \sum_e D_e$) となり，小課題 2 に通る (7 点)．

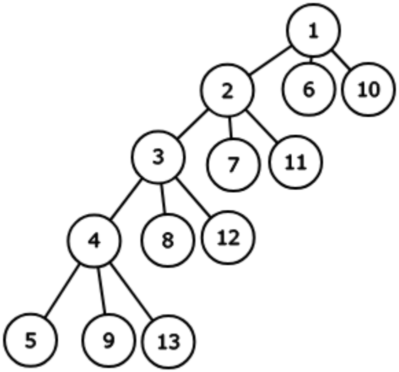


小課題 3 (列のようなグラフ) - 木 DP の高速化

小課題 3 の制約下で，小課題 1 の木 DP を高速化することを考える．

葉の点火時刻は，人気度が 0 なら 0，人気度が正なら $+\infty$ である．葉 $x_{\frac{N-1}{3}+1}$ から $x_{\frac{N-1}{3}}, \cdots, x_2, x_1$ の順に求めることを考え，それを高速化する．

葉でない頂点 v は 3 個の子 $v+1, v+a, v+b$ をもつ．$x_{v+1}+D_{(v,v+1)}$，$x_{v+a}+D_{(v,v+a)}$，$x_{v+b}+D_{(v,v+b)}$ のうち C_v 番目に小さい値が x_v である．



小課題 3 (列のようなグラフ) - 木 DP の高速化

葉でない頂点 v は 3 個の子 $v+1, v+a, v+b$ をもつ．
$[s_1, s_2] = \left[x_{v+a} + D_{(v,v+a)},\ x_{v+b} + D_{(v,v+b)}\right]$ $(s_1 \leq s_2)$ とすると，x_{v+1}, x_v 間の関係式は以下のようになる．

- $x_{v+1} + D_{(v,v+1)}$ が s_{C_v-1} より小さいとき，$x_v = s_{C_v-1}$．
- $x_{v+1} + D_{(v,v+1)}$ が s_{C_v-1} 以上 s_{C_v-0} 以下のとき，$x_v = x_{v+1} + D_{(v,v+1)}$．
- $x_{v+1} + D_{(v,v+1)}$ が s_{C_v-0} より大きいとき，$x_v = s_{C_v-0}$．

ここで，$s_i = 0$ $(i \leq 0)$, $s_i = +\infty$ $(i \geq 3)$ とする．

小課題 3 (列のようなグラフ) - 木 DP の高速化

先ほどの 3 本の式を統一的に書くと，以下のようになる．

$$x_v = \min(\max(x_{v+1} + D_{(v,v+1)},\ s_{C_v-1}),\ s_{C_v-0})$$

ここで，$s_i = 0\ (i \leq 0)$, $s_i = +\infty\ (i \geq 3)$ とする．
この x_{v+1}, x_v 間の関係式を作用 $f_v : x_{v+1} \mapsto x_v$ として見ると，f_v は $D_{(v,v+1)}$ および s_1, s_2 の値で表される．
求める値 x_1 は，$f_1(f_2(\cdots f_{\frac{N-1}{3}}(x_{init})\cdots))$ (x_{init} は $C_{\frac{N-1}{3}+1} = 0$ のとき 0，そうでないとき $+\infty$) によって求まる．
作用素 $(D_{(v,v+1)}, s_1, s_2)$ はモノイドなので，セグメント木に乗せることができる．
したがって，更新クエリは作用素の一点更新に，質問クエリは全体取得に相当し，モノイドどうしの積を適切に実装してセグメント木に乗せることで，小課題 3 に $O(N + Q\log N)$ 時間で通る (14 点)．

小課題 4, 5 (質問クエリは頂点 1 のみ) - 小課題 2, 3 のアイデアを一般の木に拡張

小課題 3 の考え方を一般の木に拡張する．
任意の葉でない頂点 v に対して，子を 1 つ選んで heavy な子として，ほかの子を light な子とする．子側の端点によって，辺にも heavy/light の区別をつける．
頂点 v の子の個数を $d(v)$ としたとき，light な子 $d(v)-1$ 個についての $x_w + D_{(v,w)}$ の値を昇順に $s_1, \cdots, s_{d(v)-1}$ としたとき，heavy な子 u に対して

$$x_v = \min(\max(x_u + D_{(v,u)},\ s_{C_v - 1}),\ s_{C_v - 0})$$

が成り立つ．ここで，$s_i = 0\ (i \le 0)$, $s_i = +\infty\ (i \ge d(v))$ とする．
上の作用を f_v とおく．

小課題 4, 5 (質問クエリは頂点 1 のみ) - 小課題 2, 3 のアイデアを一般の木に拡張

頂点 v から heavy な子を下方向にたどって通る頂点を $v = h^0(v), h^1(v), \cdots, h^k(v)$ とおき，そのうち最後に行きつく葉を $\mathrm{leaf}(v)$ とおく．また，葉 $\mathrm{leaf}(v)$ に対して

$$\mathrm{init}(\mathrm{leaf}(v)) = \begin{cases} 0 & (C_{\mathrm{leaf}(v)} = 0) \\ +\infty & (C_{\mathrm{leaf}(v)} > 0) \end{cases}$$

とおく．このとき，頂点 v の点火時刻 x_v は

$$x_v = f_{h^0(v)}(f_{h^1(v)}(\cdots f_{h^{k-1}(v)}(\mathrm{init}(\mathrm{leaf}(v)))\cdots))$$

となる．

小課題 4, 5 (質問クエリは頂点 1 のみ) - 小課題 2, 3 のアイデアを一般の木に拡張

ある頂点の作用素は，light な子それぞれの「点火時刻 + 辺の長さ」，および heavy な辺の長さによって決まる．辺の長さは容易に変更できるので，light な子の点火時刻の更新について考える．
頂点 v に対する変更クエリにおいて，影響を受ける light な子は v の先祖に限られる．よって，以下のように反復して，根に向かって下から対応すればよい．v の初期値は，変更対象の頂点とする．

- $\mathrm{leaf}(v)$ から上に向かって heavy な辺をたどり続け，最終的に行きつく頂点 (light な頂点，もしくは根) の点火時刻を求める．その頂点を新たな v とする．
- v が根であれば反復を終了する．v が light な頂点であれば，その親の作用素を更新し，親を新たな v とする．

辺への変更クエリも同様に処理する．

小課題 4, 5 (質問クエリは頂点 1 のみ) - 小課題 2, 3 のアイデアを一般の木に拡張

heavy な子の選び方において，部分木のサイズが最も大きいような子を heavy な子として選ぶことにする (重軽分解)．このとき，1 回の反復ごとに light な辺を 1 本通り，そのたびに部分木 v のサイズが 2 倍以上になるので，反復回数は $O(\log N)$ 回で済む．各反復では作用素の区間取得・一点更新を高々 1 回ずつ行うことになり，これはセグメント木によって $O(\log N)$ 時間でできる．
作用素の更新には，light な子の情報に対する kth の取得が必要になる．これには小課題 2 のアイデア (動的セグメント木上の二分探索や PBDS など) を適用できる．

全体で $O(N\log A + Q\log N(\log N + \log A))$ 時間となるので，小課題 2,3,4,5 に通り，$7 + 14 + 25 + 12 = 58$ 点を得る．

小課題 6, 7 (満点制約) - Re-rooting

全方位木 DP の要領で，重軽分解上での Re-rooting を行う．

1. 根 r の点火時刻 x_r を求める．
2. 求めたい頂点 v に向かって根から heavy パス / light 辺をたどり，真の点火時刻 $x_v^\top$ を求める．

ある辺 (v, u) を下るとき，子頂点 u からさらに heavy 辺を下ることになっている場合は，非 Re-rooting の段階と同様の作用素で書けるので，パスをまとめて処理できる．そうでないときは，$[s_1, \cdots, s_{d(v)-1}]$ に以下の一時変更を加えた多重集合での kth が x_u となる．

- 下るべき light 辺の値を除く．
- heavy 辺の値を加える．

一時変更はクエリあたり $O(\log N)$ 回起こるので，解法全体で $O(N \log A + Q \log N(\log N + \log A))$ 時間となる．これは十分高速に動作し，満点を得ることができる．