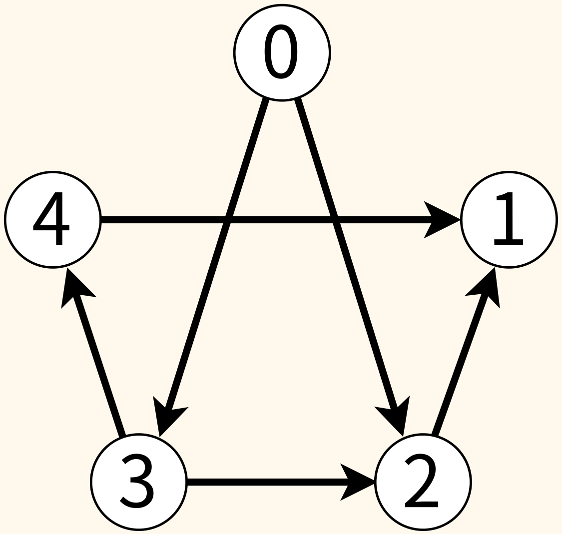
電圧 2 (Voltage 2)

解説担当 : 太田克樹 (shiomusubi496)

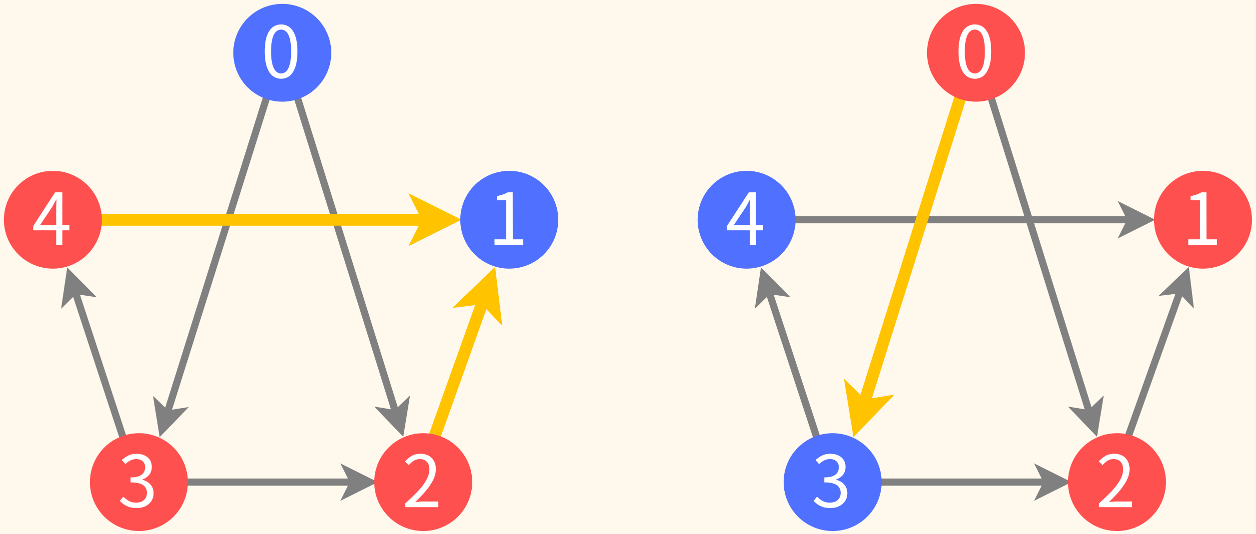
問題概要

問題概要



- N 頂点 M 辺の隠された有向グラフがある
- $30\,000$ 回以下のクエリで全ての辺を特定したい
- クエリ内容は次ページ

問題概要



- 各頂点に高電圧と低電圧を 2 通りに設定する
- 高電圧から低電圧に向かう辺には電流が流れる
- どちらが電流の流れる辺が多いかを知ることができる

制約

- $2 \leq N \leq 500$
- $1 \leq M \leq 1000$
- 自己ループはない
- 多重辺は向きを無視しても存在しない

小課題

番号	追加制約	配点(JOI)	配点(JOIG)
1	$N = 2$	0	4
2	パスグラフ, $N \leq 100$	10	16
3	パスグラフ	12	21
4	出次数 $1, N \leq 100$	27	24
5	出次数 1	18	14
6	$N \leq 100$	17	11
7	特になし	16	10

注意

- 「電流の流れた辺の本数」は長いので、
  単に「電流」と呼ぶことにする
  - 「電流が 3 流れた」みたいな言い方をします
- 以降、小課題番号は JOIG に準拠
  - JOI の人は番号から 1 を引いてください

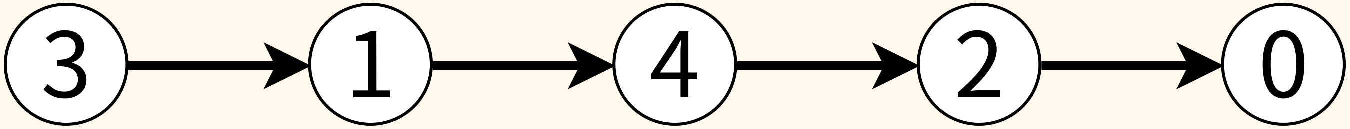
小課題 1 ($N = 2$)

小課題 1 ($N = 2$)

- $1 \leq M$ と多重辺の制約から、答えは 2 通りに限られる
- ふたつの区別ができるクエリを何でもいいので送ろう
- 例えば、全て高電圧だと電流は流れない
- `query([1, 1], [1, 0])` が 1 か 0 かで判別できる

小課題 2,3 (パスグラフ)

小課題 2,3 (パスグラフ)

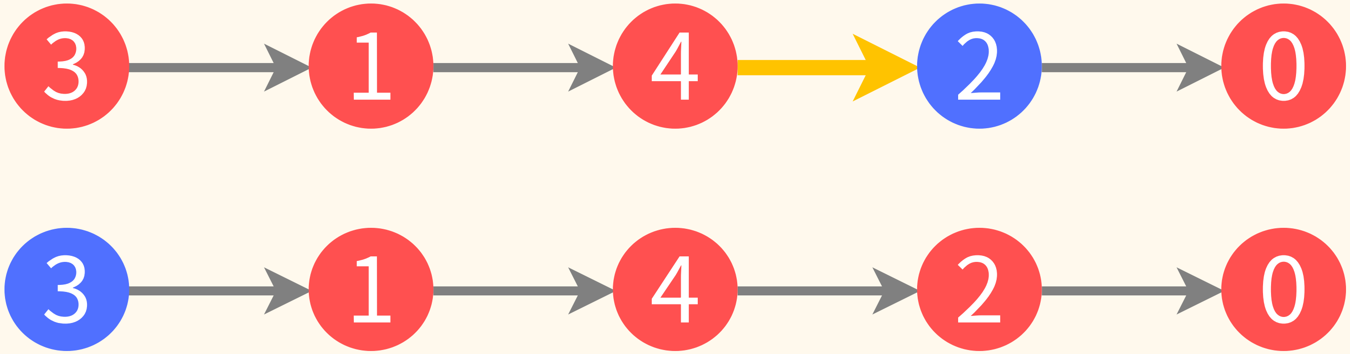


- せっかくパスなので、端点から順番に特定できると嬉しい
- まずは端点を特定する方法を考えてみる

小課題 2,3 (パスグラフ)

- 流れる電流が確実に分かる電圧の設定があると嬉しい
  - 小課題 1 と同じように、全部高電圧にしてみよう
- では、そこから 1 頂点だけ低電圧にするとどうなるか？

小課題 2,3 (パスグラフ)



- 流れる電流は、低電圧にした頂点が、
  - パスの始点なら 0
  - そうでないなら 1

となるので、
全て高電圧のときと比べれば始点かどうかが分かる

小課題 2,3 (パスグラフ)

- N 頂点を順に試せば、始点を N 回のクエリで特定できる
- 次は、始点から順番に次の頂点を特定していこう
  - この方法によって小課題 2, 3 が分かれる
- まずは小課題 2 の方から

小課題 2 (パスグラフ)

- 先ほど、始点のみ低電圧で残りは高電圧の設定をした
- 実は、始点を低電圧に固定すると、
  始点を無視することができる
  - 低電圧から出る辺には絶対に電流が流れないため

小課題 2 (パスグラフ)

- 始点を無視すると $N-1$ 頂点の小さい問題に帰着できる
- 再帰的に解くことで、最終的に 1 頂点(終点)のみになる
- クエリ $N+(N-1)+\cdots+1=\dfrac{N(N+1)}{2}$ 回など
- $N \leq 100$ であれば余裕で $30\,000$ に収まる

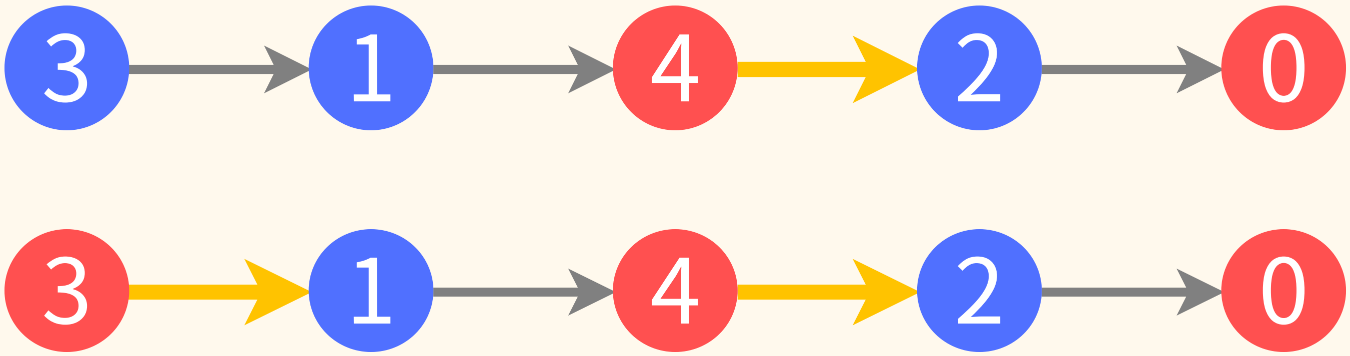
小課題 3 (パスグラフ)

- 次は小課題 3
- $N \leq 500$ だと、$\Omega(N^2)$ クエリはちょっと厳しそう
- OI Communication では二分探索が典型的
- 始点の次の頂点を見つけるのに二分探索は使えるか？

小課題 3 (パスグラフ)

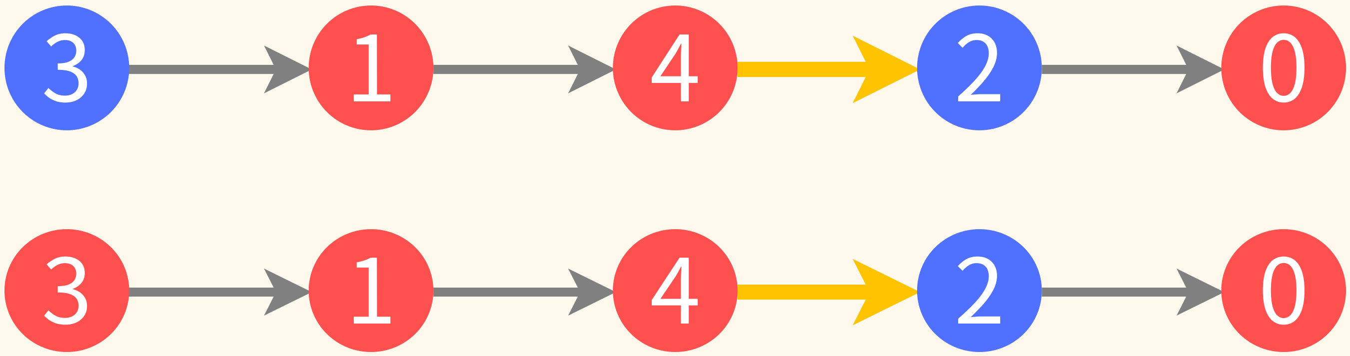
- 二分探索をするには、任意の頂点集合 S に対し、求める頂点があるかどうかが分かれば良い
- S の頂点がどうパスに位置しているか分からない
  - 小課題 2 のように S 全体を高電圧/低電圧にするのは嬉しくなさそう
- 逆に、場所が分かっている始点を変化させてみよう

小課題 3 (パスグラフ)



- 始点の次の頂点が低電圧であるとき
  - 始点を低電圧にすると始点から電流は流れない
  - 始点を高電圧にすると始点から電流が流れる
- よって、始点を高電圧にした方が多く電流が流れる

小課題 3 (パスグラフ)



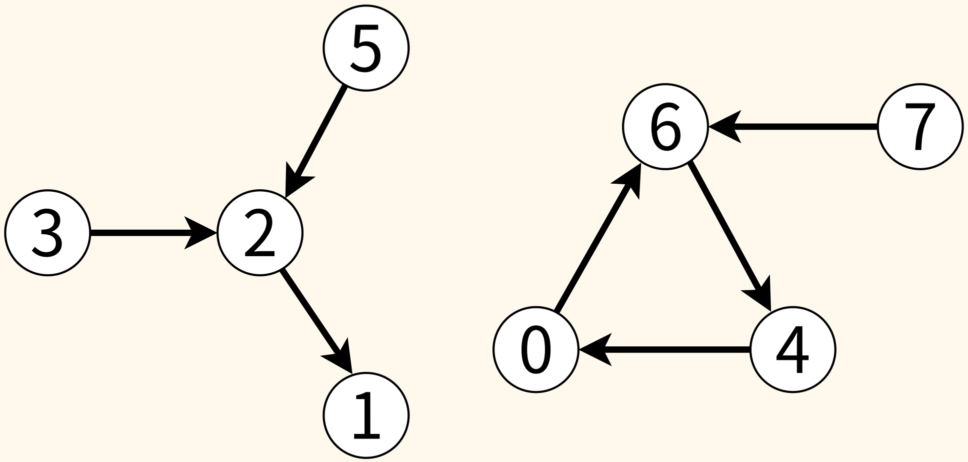
- 始点の次の頂点が高電圧であるとき
  - 始点を低電圧にすると始点から電流は流れない
  - 始点を高電圧にすると始点から電流は流れない
- よって、始点の電圧を変えても電流は変わらない

小課題 3 (パスグラフ)

- 以上より、始点の次の頂点が低電圧か高電圧かを 1 クエリで判定できる
- S を低電圧に、他を高電圧にすれば次の頂点が S に属するかが分かる
- $S = [0, N/2), [N/4, N/2), \ldots$ のようにして、二分探索で次の頂点を求められる
- その次の頂点の時には始点を低電圧にして無視すれば良い
- クエリ数は $N + (N-1)\log_2 N$ など

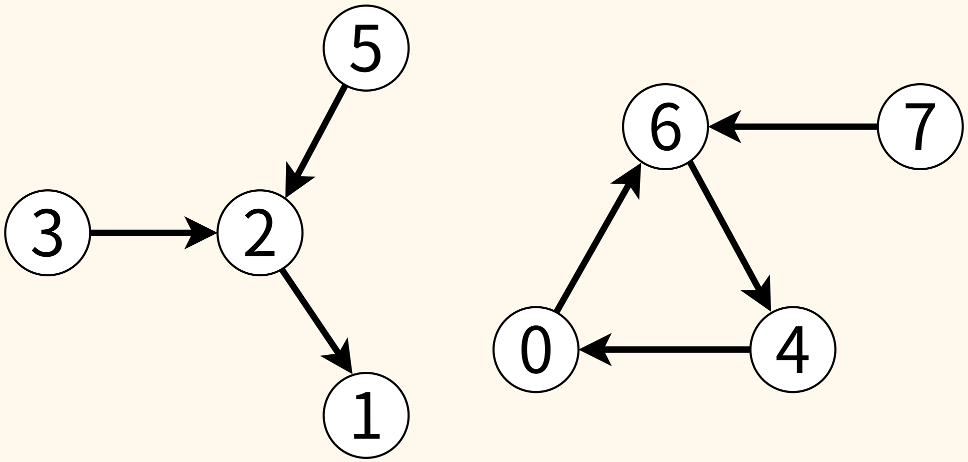
小課題 4,5 (出次数が 1 以下)

小課題 4,5 (出次数が 1 以下)



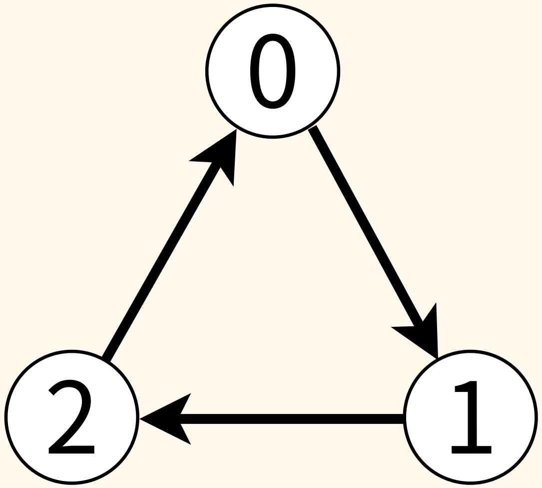
- まずはグラフの形を整理しよう
- だいたい functional graph っぽい形になる
- (弱)連結成分は有向木か functional graph のいずれか
- いちど(弱)連結成分ごとに分けて考えてみよう

小課題 4,5 (出次数が 1 以下)



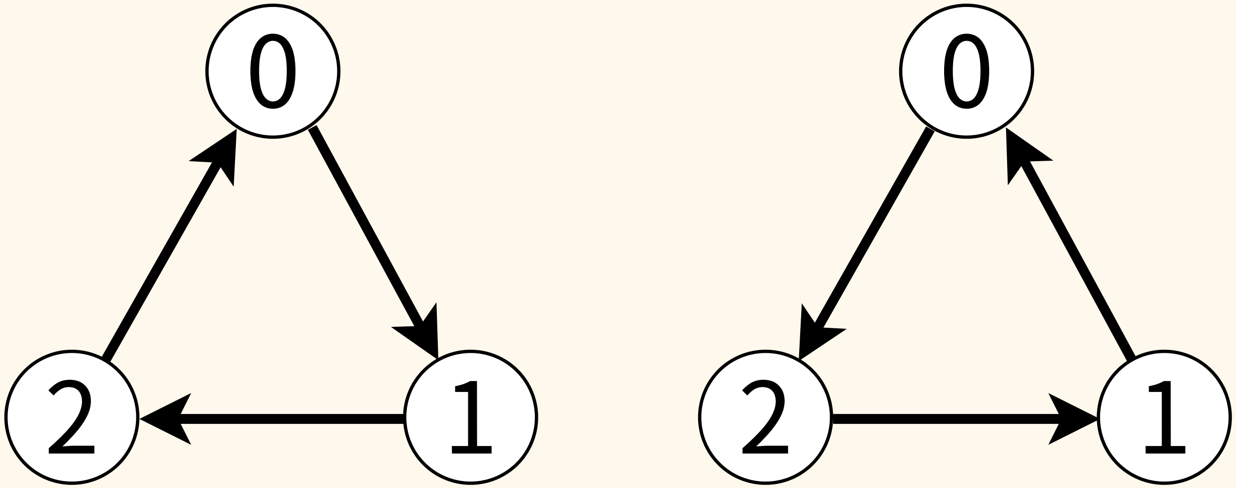
- 有向木はパスの拡張として考えられそう
- 厄介なのは functional graph になっている方
- そういえばパスグラフでは常にグラフが特定可能だった
- ではどういうケースでグラフが特定不可能なのか？

小課題 4,5 (出次数が 1 以下)



- Q. 例えばこういうケースは特定できるか？

小課題 4,5 (出次数が 1 以下)

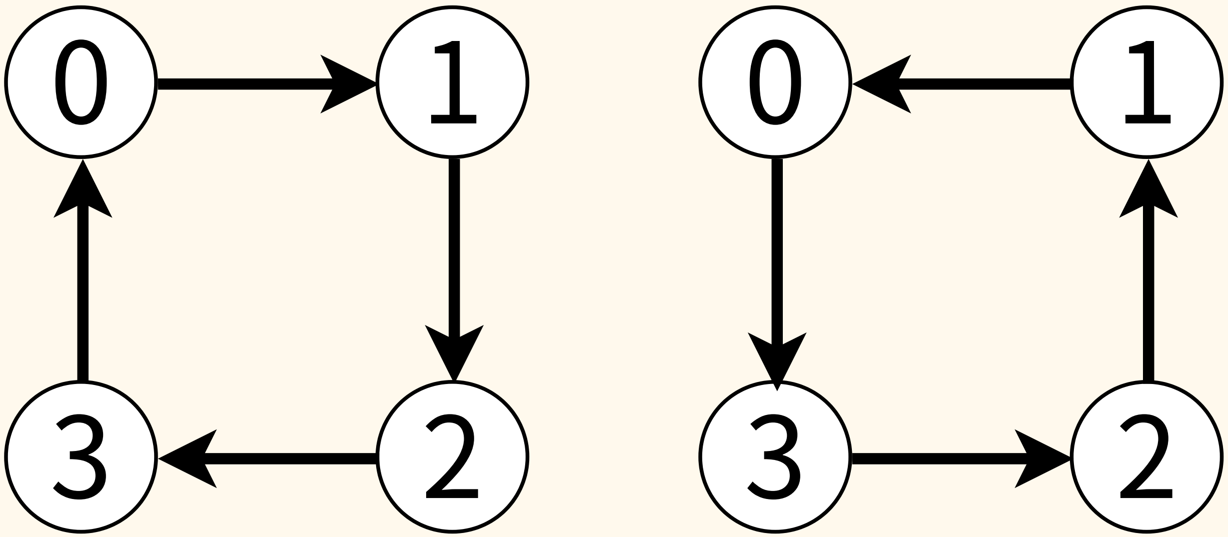


- hint. この二つは区別できるか？

小課題 4,5 (出次数が 1 以下)

- A. できない
- どちらのグラフでも
  - 全て同じ電圧なら電流は流れない
  - 高電圧と低電圧が両方あるなら電流は 1 流れる
- どの電圧設定でも同じ電流が流れるので区別は不可能

小課題 4,5 (出次数が 1 以下)



- Q. この二つは区別できるか？

小課題 4,5 (出次数が 1 以下)

- A. できない
- 一般に、サイクル(閉路)グラフは全て特定不可能
  - 電圧の設定によらず、高電圧から低電圧に向かう辺と低電圧から高電圧に向かう辺が同じ数あるため
  - 制約からサイクルは頂点数 3 以上であることに注意
- より一般に、サイクルを含むグラフは全て特定不可能
  - サイクルの辺を入れ替えたグラフと区別できない
- 先ほどのグラフ(sample 3)は `false` と返すのが正解

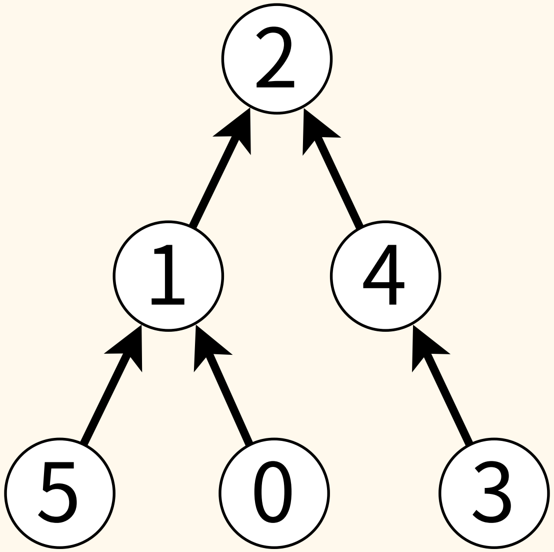
小課題 4,5 (出次数が 1 以下)

- functional graph はサイクルを含む
- よってグラフが特定可能であるためには、
  全ての(弱)連結成分が有向木である必要がある
- いったん判定は後回しにして、すべての(弱)連結成分が
  有向木であるときの解法を考えてみる

小課題 4,5 (出次数が 1 以下)

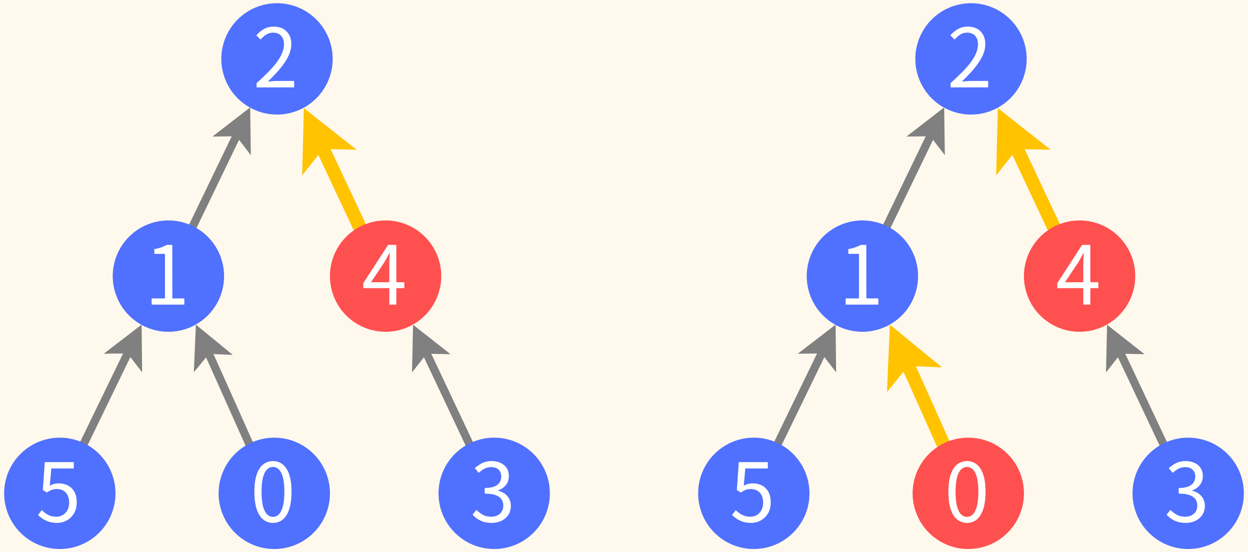
- パスグラフのときと全く同様に、葉(入次数 0 の頂点)は N 回のクエリで全て見つけることができる
- それぞれの始点から辺の向かう先の頂点を求めたい
- 実際、これはパスグラフのときと似た方法でできる

小課題 4,5 (出次数が 1 以下)



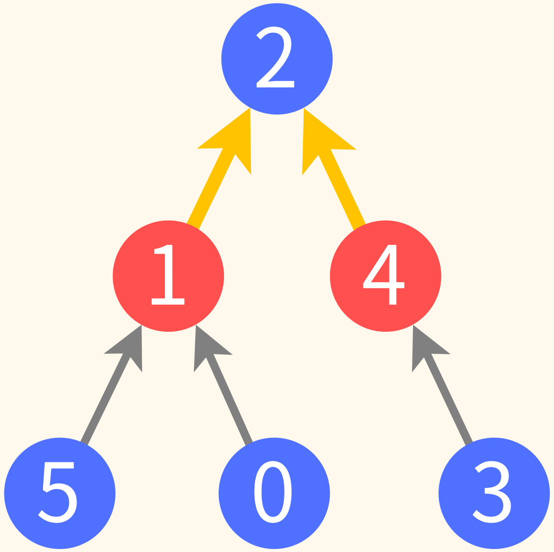
- こういうグラフを考える
- 今、頂点 $0, 3, 5$ が葉であることは分かっている
- 頂点 0 からどこに辺が出ているかを調べよう
- 頂点 $3, 5$ は例のごとく低電圧に固定すると無視できる

小課題 4,5 (出次数が 1 以下)



- 頂点 0 から辺が出る頂点が存在し、低電圧のとき
  - 頂点 0 を低電圧にすると頂点 0 から電流は流れない
  - 頂点 0 を高電圧にすると頂点 0 から電流が流れる
- よって、頂点 0 を高電圧にした方が多く電流が流れる

小課題 4,5 (出次数が 1 以下)



- 頂点 0 から辺が出る頂点が存在しないか、高電圧のとき
  - 頂点 0 を低電圧にすると頂点 0 から電流は流れない
  - 頂点 0 を高電圧にすると頂点 0 から電流は流れない
- よって、頂点 0 の電圧を変えても電流は変わらない

小課題 4,5 (出次数が 1 以下)

- 以上より、頂点 0 の次の頂点が高電圧かどうかを 1 クエリで判定できる
  - 1 頂点ずつ試すと N クエリで次の頂点が分かる
  - 二分探索すると $\log_2 N$ クエリで次の頂点が分かる
- これを繰り返すと次ページのアルゴリズムが作れる

小課題 4,5 (出次数が 1 以下)

- キュー Q を葉全体の集合で初期化する
- Q が空でない限り繰り返す
  - Q から頂点 v を取り出す
  - v から出る辺 $v \longrightarrow u$ を特定する
    - 存在しないときは次のステップを飛ばす
  - u に入る辺を全て見つけ終わっているなら、u を Q に加える

小課題 4,5 (出次数が 1 以下)

- 最後の行の判定はどうすれば良いか？
- 実は葉の特定とほぼ同じようにできる
- 確認済み(Q から取り出し済み)の頂点を低電圧にすれば葉の特定のときと同様に 1 クエリでできる

小課題 4,5 (出次数が 1 以下)

- ところで、後回しにしていた判定をしなくてはならない
- functional graph に先ほどのアルゴリズムを使うと、
  サイクル内の頂点が Q に入らないまま終了する
- アルゴリズムが終了したときに全ての頂点を確認したかで
  サイクルがあるかが判断できる
- サイクルがなければこのアルゴリズムでグラフは特定可能
- これで解けた

小課題 4,5 (出次数が 1 以下)

- クエリ数は、
  - 小課題 4 : $N + \frac{N(N-1)}{2} + M$
  - 小課題 5 : $N + N \log_2 N + M$

  など

- この M はアルゴリズムの最後の行を反映
  - 辺が見つかるたびにチェックするため

小課題 6,7 (追加制約なし)

小課題 6,7 (追加制約なし)

- 小課題 4,5 の解法に既視感がある人も多いはず
- このアルゴリズムはトポロジカルソートをしている
- サイクルを含むグラフで特定不可能であることと整合する
- これを踏まえると一般の有向グラフにも自然に拡張できる
- 必要なのは、頂点 v から出る辺を全て見つける方法

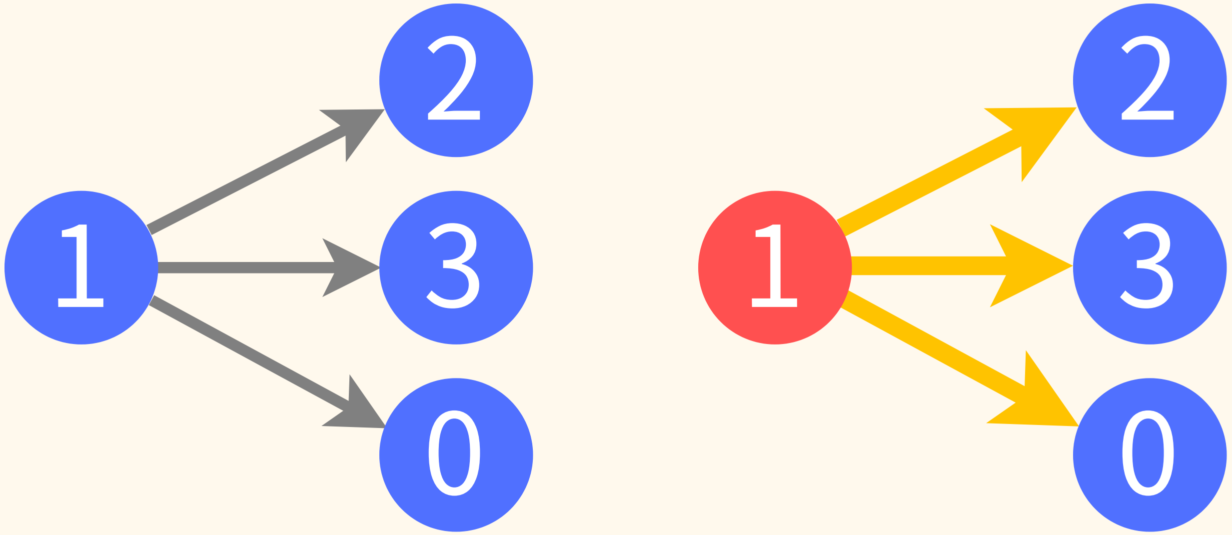
小課題 6 (追加制約なし)

- 小課題 6 の方は(小課題 4 で方針が当たっていれば)簡単
- 小課題 4 では、 N クエリかけて
  全ての頂点 u について $v \to u$ が存在するかを確認した
- 先ほどはこれが高々 1 個なのでそれだけ処理した
- 今度は見つかった全ての辺に対し同じ処理をすれば良い
- クエリ数は変わらず $N + \frac{N(N-1)}{2} + M$ など

小課題 7 (追加制約なし)

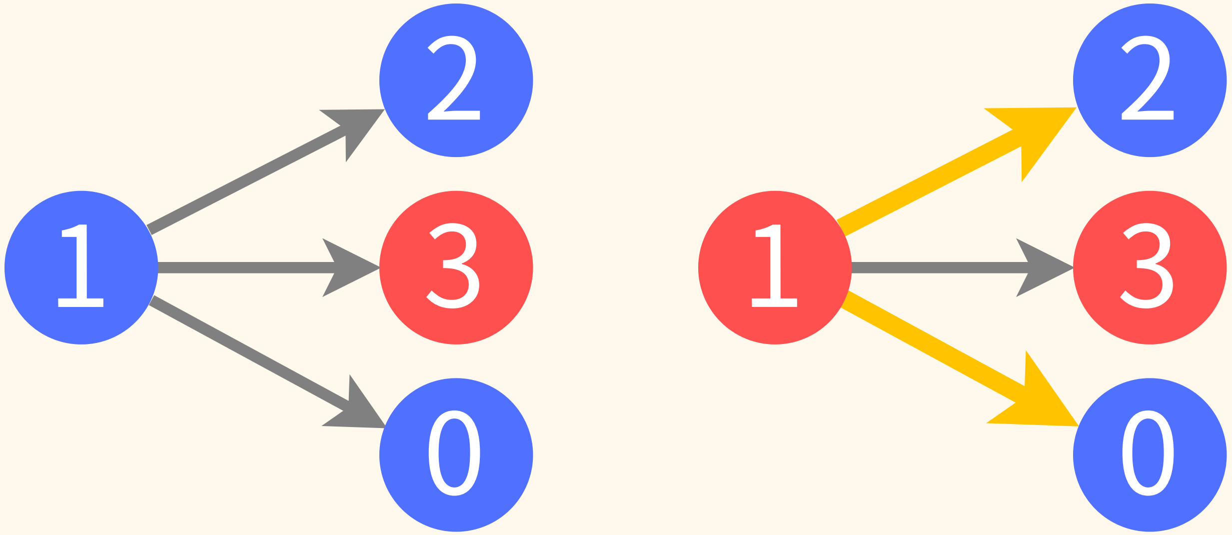
- 小課題 7 の方は小課題 6 より難しい
- 二分探索は正しく機能するだろうか

小課題 7 (追加制約なし)



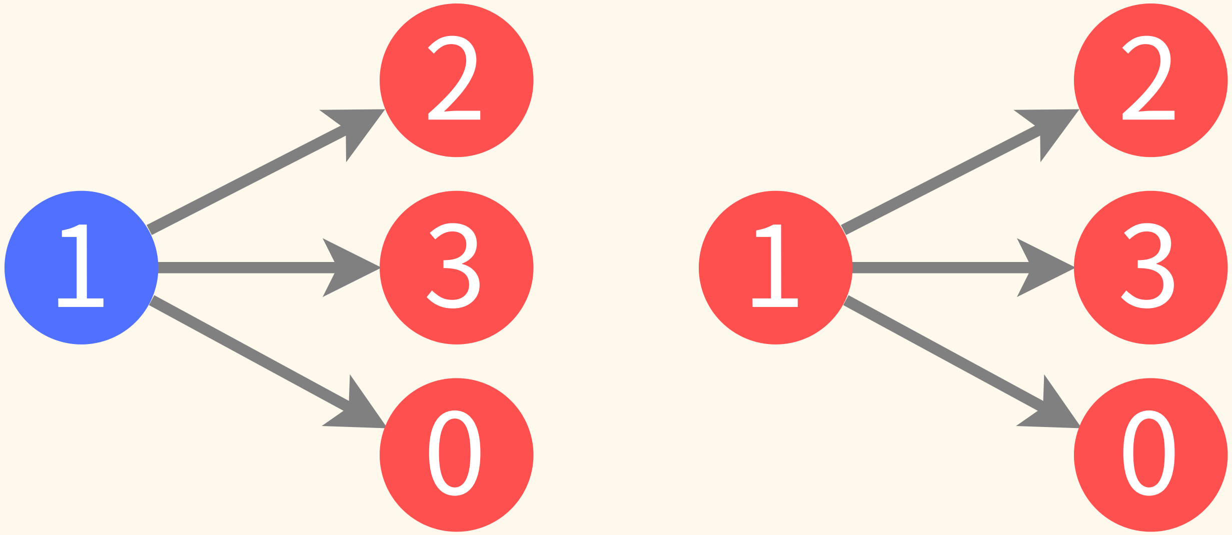
- 頂点 1 の次の頂点がすべて低電圧であるとき
  - 頂点 1 を低電圧にすると頂点 1 から電流は流れない
  - 頂点 1 を高電圧にすると頂点 1 から電流が流れる
- よって、頂点 1 を高電圧にした方が多く電流が流れる

小課題 7 (追加制約なし)



- 頂点 1 の次の頂点に高電圧/低電圧がどちらもあるとき
  - 頂点 1 を低電圧にすると頂点 1 から電流は流れない
  - 頂点 1 を高電圧にすると頂点 1 から電流が流れる
- このときも頂点 1 を高電圧にした方が多く電流が流れる

小課題 7 (追加制約なし)



- 頂点 1 の次の頂点がすべて高電圧であるとき
  - 頂点 1 を低電圧にすると頂点 1 から電流は流れない
  - 頂点 1 を高電圧にすると頂点 1 から電流は流れない
- よって頂点 1 の電圧を変えても電流は変わらない

小課題 7 (追加制約なし)

- 以上の観察から分かる通り、この方法で分かるのは、「頂点 v から出て低電圧の頂点に入る辺があるか」である
- よって、S の頂点を低電圧に、他を高電圧にすると、$v \longrightarrow u$ が存在する u ($u \in S$) があるかが分かる
- これで二分探索すると、$v \longrightarrow u$ が存在する u のうち頂点番号が最も小さいものが求まる
- u が求まった次は、その u を S に入れなければ良い

小課題 7 (追加制約なし)

- キュー Q を入次数 0 の頂点全体の集合で初期化する
- Q が空でない限り繰り返す
  - Q から頂点 v を取り出す
  - 以下を繰り返す
    - 辺 $v \to u$ が存在する u のうち最小を求める
      - 存在しないときは `break`
    - u に入る辺を全て見つけ終わっているなら、
      u を Q に加える

小課題 7 (追加制約なし)

- クエリ数の解析をする
- 二分探索が行われるのは、各頂点で (出次数)$+1$ 回
- 出次数の合計は M なので、合計で $M+N$ 回
- よって全部で $N+(M+N)\log_2 N+M$ クエリ
  - $N+M(1+\log_2 N)+N+M$ にもできる

小課題 7 (追加制約なし)

- 以上で満点が得られる

得点分布

得点分布(JOI)

得点	1	2	3	4	5	6	人数
100	o	o	o	o	o	o	3
54	o	x	o	x	o	x	2
49	o	o	o	x	x	x	3
37	o	x	o	x	x	x	1
22	o	o	x	x	x	x	5
10	o	x	x	x	x	x	11
0	x	x	x	x	x	x	5

得点分布(JOIG)

得点	1	2	3	4	5	6	7	人数
20	o	o	x	x	x	x	x	10
4	o	x	x	x	x	x	x	4
0	x	x	x	x	x	x	x	1