福若格斯 solution

xllend3

IIIS, Tsinghua

2017 年 12 月 2 日

题意

- 两个人玩一个有限状态非对称组合游戏

题意

- 两个人玩一个有限状态非对称组合游戏
- 给出 m 个棋盘，求所有 2^m 个子集的胜负结果

得分分布

- 100 分：50 人

吐槽

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

5min: 读完题目

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

5min: 读完题目
15min: 写完暴力交一发过了前两个点

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

20min: 观察出了一些性质:

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

20min: 观察出了一些性质:

- L 必胜 +L 必胜 =L 必胜
- R 必胜 +R 必胜 =R 必胜

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

20min: 观察出了一些性质:

- L 必胜 +L 必胜 =L 必胜
- R 必胜 +R 必胜 =R 必胜
- x+ 后手必胜 =x

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

20min: 观察出了一些性质：

- L 必胜 +L 必胜 =L 必胜
- R 必胜 +R 必胜 =R 必胜
- x+ 后手必胜 =x

那么所有后手必胜的状态都可以先去掉，最后乘上 2^k。

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

20min: 观察出了一些性质:

- L 必胜 +L 必胜 =L 必胜
- R 必胜 +R 必胜 =R 必胜
- x+ 后手必胜 =x

那么所有后手必胜的状态都可以先去掉，最后乘上 2^k。
并且对于由两个同一方必胜的集合拼起来的集合可以直接计算。

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

20min: 观察出了一些性质:

- L 必胜 +L 必胜 =L 必胜
- R 必胜 +R 必胜 =R 必胜
- x+ 后手必胜 =x

那么所有后手必胜的状态都可以先去掉，最后乘上 2^k。
并且对于由两个同一方必胜的集合拼起来的集合可以直接计算。
加上这个优化之后大约能搜过前四个点，但是作为一个熟练的 OI 选手，自然是不会去写暴力的。

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

25min: 又观察出了一些性质:

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

25min: 又观察出了一些性质：

- 令-x 表示将 x 对称之后的状态，如 L_RLR 对称后为 LRL_R
- 定义后手必胜状态为 0，那么有 x+(-x)=0

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

25min: 又观察出了一些性质:

- 令-x 表示将 x 对称之后的状态，如 L_RLR 对称后为 LRL_R
- 定义后手必胜状态为 0，那么有 x+(-x)=0
- 所以同时将一局游戏中的 x 和-x 都删掉不会影响结果

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

25min: 又观察出了一些性质:

- 令-x 表示将 x 对称之后的状态，如 L_RLR 对称后为 LRL_R
- 定义后手必胜状态为 0，那么有 x+(-x)=0
- 所以同时将一局游戏中的 x 和-x 都删掉不会影响结果

那么在搜索过程中可以把匹配的状态都删掉。

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

25min: 又观察出了一些性质:

- 令-x 表示将 x 对称之后的状态，如 L_RLR 对称后为 LRL_R
- 定义后手必胜状态为 0，那么有 x+(-x)=0
- 所以同时将一局游戏中的 x 和-x 都删掉不会影响结果

那么在搜索过程中可以把匹配的状态都删掉。
加上这个优化之后大约能搜过 $m \le 12$，但是作为一个熟练的 OI 选手，自然是不会去写暴力的。

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

30min: 又观察出了一些性质:

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

30min: 又观察出了一些性质:

- 若 A+(-B)=0，则 A 和 B 完全等价

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

30min: 又观察出了一些性质:

- 若 A+(-B)=0，则 A 和 B 完全等价
- 经过爆搜程序打表，可以发现除了 0 状态之外只有四种本质不同的状态

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

35min: 对于这四种状态分别分析:

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

35min: 对于这四种状态分别分析：

- LL_RR(A): 奇数个先手必胜，偶数个后手必胜，即 A+A=0

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

35min: 对于这四种状态分别分析:

- LL_RR(A): 奇数个先手必胜，偶数个后手必胜，即 A+A=0
- L_LRR(B):L 必胜

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

35min: 对于这四种状态分别分析:

- LL_RR(A): 奇数个先手必胜，偶数个后手必胜，即 A+A=0
- L_LRR(B):L 必胜
- RL_LR(C):L 必胜

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

35min: 对于这四种状态分别分析:

- LL_RR(A): 奇数个先手必胜，偶数个后手必胜，即 A+A=0
- L_LRR(B):L 必胜
- RL_LR(C):L 必胜
- LRRL_(D):L 必胜

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

35min: 对于这四种状态分别分析：

- LL_RR(A): 奇数个先手必胜，偶数个后手必胜，即 A+A=0
- L_LRR(B):L 必胜
- RL_LR(C):L 必胜
- LRRL_(D):L 必胜

根据这个可以通过 5，6 两个点（当然不归类直接找规律也能找出来），但是作为一个熟练的 OI 选手，自然是不会去写暴力的。

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

40min: 对于这四种状态的组合进行打表可以发现 2C+(-D)=0

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

40min: 对于这四种状态的组合进行打表可以发现 2C+(-D)=0
那么 D 就可以完全使用 2C 来替代

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

45min: 注意到 A+A=0，那么只需要根据 A 的奇偶性分开打表即可。

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

45min: 注意到 A+A=0，那么只需要根据 A 的奇偶性分开打表即可。
当 A 为偶数时，观察到 C+(-9B) 仍为 L 必胜，大胆猜想任意多个 B 都不能比 C 大，直接双关键字判断即可。

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

50min: 当 A 为奇数时，观察到 A+B 为先手必胜，A+2B 为 L 必胜，A+C 为 L 必胜，由之前的结论得 A 加上更多的 B 和更多的 C 也为 L 必胜

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

50min: 当 A 为奇数时，观察到 A+B 为先手必胜，A+2B 为 L 必胜，A+C 为 L 必胜，由之前的结论得 A 加上更多的 B 和更多的 C 也为 L 必胜
大胆猜想仍然只需要双关键字判断 (C, B) 是否大于 $(0, 1)$ 即可。

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

60min: 随手写了一个 $O(m)$ 计数 1A

一个熟练的 OI 选手如何在 60min 内 AC 本题

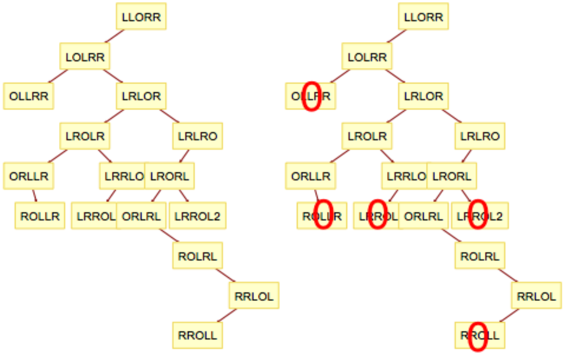
60min: 随手写了一个 $O(m)$ 计数 1A
由此可见，对于一个瞎猜结论从不证明的 OI 选手来说，这个题就是一个人人都能 A 的友情送分题（雾

首先画出状态转移图

首先画出状态转移图
由于对称性只要画一边的就可以了

根据之前的结论可以把终止态先标上 0。

根据之前的结论可以把终止态先标上 0。

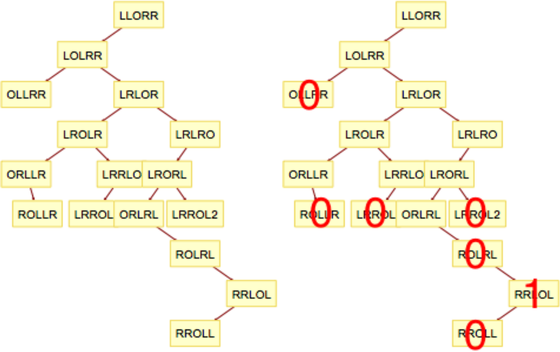


假如一个状态只有一个到 0 的出边，那么另外一个人的操作对这个状态没有任何影响。

假如一个状态只有一个到 0 的出边，那么另外一个人的操作对这个状态没有任何影响。
不妨定义 L 能走一步的状态为单位 1

假如一个状态只有一个到 0 的出边，那么另外一个人的操作对这个状态没有任何影响。
不妨定义 L 能走一步的状态为单位 1
容易看出 R 到 1 的状态为后手必胜

假如一个状态只有一个到 0 的出边，那么另外一个人的操作对这个状态没有任何影响。
不妨定义 L 能走一步的状态为单位 1
容易看出 R 到 1 的状态为后手必胜



5-不可达点

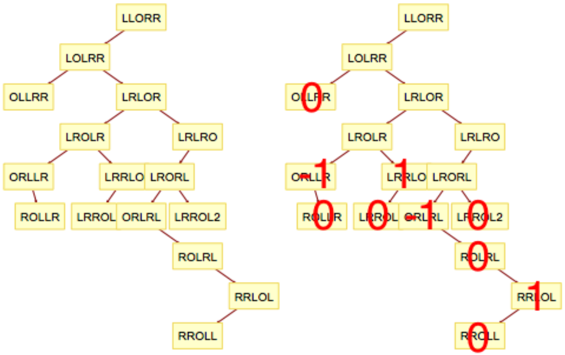
对于 5-不可达点的数据，状态只有-1,0,1 三种，且胜负为-1 和 1 多的那一方，如果相同则后手必胜

5-不可达点

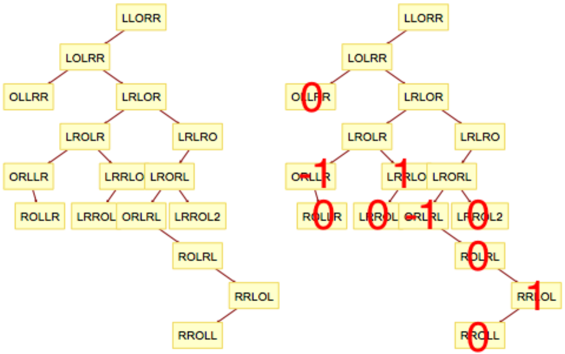
对于 5-不可达点的数据，状态只有-1,0,1 三种，且胜负为-1 和 1 多的那一方，如果相同则后手必胜
写个组合数就可以通过 5-不可达点的数据。

同理我们还可以继续确定一些状态的值

同理我们还可以继续确定一些状态的值

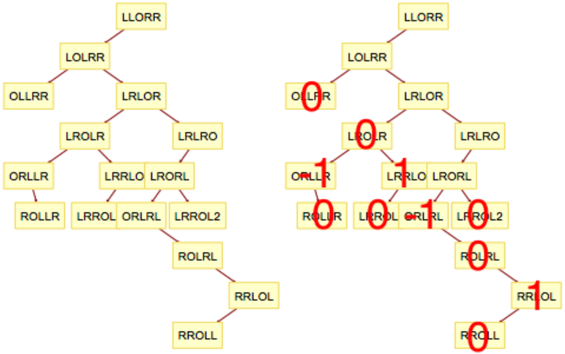


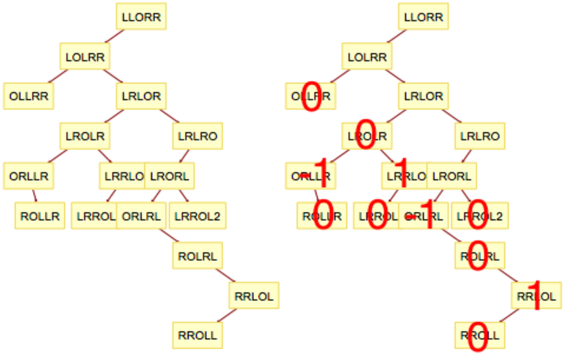
同理我们还可以继续确定一些状态的值



容易看出 LR_LR 为后手必胜

人类智慧画搜索树


LLORR
LOLRR
OLLRR
LRLOR
LROLR
LRLRO
ORLLR
LRRLO
LRORL
ROLLR
LRROL
ORLRL
LRROL2
ROLRL
RRLOL
RROLL
0
0
1
1
0
0
1
0
0
1
0


LLORR
LOLRR
OLLRR
LRLOR
LROLR
LRLRO
ORLLR
LRRLO
LRORL
ROLLR
LRROL
ORLRL
LRROL2
ROLRL
RRLOL
RROLL
0
0
1
1
0
0
1
0
0
1
0

LR_RL 应该是多少呢?

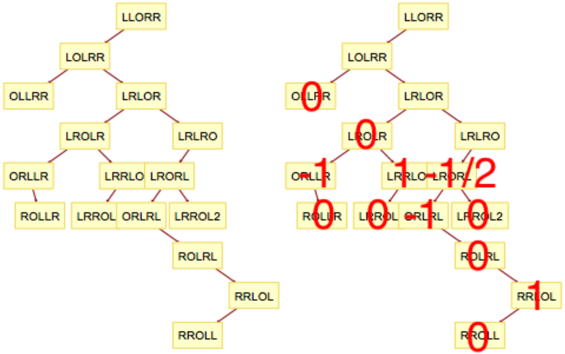
考虑只有-1,0,1 和 LR_RL 的游戏

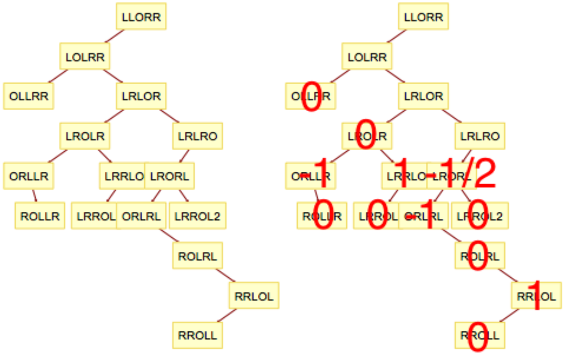
考虑只有-1,0,1 和 LR_RL 的游戏
对于 LR_RL，如果被 R 先走，那么这个状态就等价于-1，但是如果 L 先走，走完之后仍然是一个-1

考虑只有-1,0,1 和 LR_RL 的游戏
对于 LR_RL，如果被 R 先走，那么这个状态就等价于-1，但是如果 L 先走，走完之后仍然是一个-1
所以双方都会优先走 LR_RL，最后再互拼步数

考虑只有-1,0,1 和 LR_RL 的游戏
对于 LR_RL，如果被 R 先走，那么这个状态就等价于-1，但是如果 L 先走，走完之后仍然是一个-1
所以双方都会优先走 LR_RL，最后再互拼步数
容易发现每两个 LR_RL 在双方各走一步之后转化为一个-1，那么 LR_RL=-1/2

人类智慧画搜索树


LLORR
LOLRR
OLLRR
LRLOR
LROLR
LRLRO
ORLLR
LRRLO
LRORL
ROLLR
LRROL
ORLRL
LRROL2
ROLRL
RRLOL
RROLL



同理，容易看出 LRLR_ 为后手必胜

2-不可达点

对于 2-不可达点的数据，状态只有-1,-1/2,0,1/2,1 三种，且胜负为和大的那一方，如果相同则后手必胜

2-不可达点

对于 2-不可达点的数据，状态只有-1,-1/2,0,1/2,1 三种，且胜负为和大的那一方，如果相同则后手必胜
写个组合数 + 前缀和就可以通过 2-不可达点的数据。

2-不可达点

对于 2-不可达点的数据，状态只有-1,-1/2,0,1/2,1 三种，且胜负为和大的那一方，如果相同则后手必胜
写个组合数 + 前缀和就可以通过 2-不可达点的数据。
当然你要是觉得这个模数适合 FFT 我也不反对

大家都知道的部分

定义一个状态为 $\{L|R\}$，其中 L 和 R 为状态的集合（可以为空集）

大家都知道的部分

定义一个状态为 $\{L|R\}$，其中 L 和 R 为状态的集合（可以为空集）

一开始定义 $0=\{|\}=\{\{\}|\{\}\}$ 为第 0 天出生的数字

大家都知道的部分

定义一个状态为 $\{L|R\}$，其中 L 和 R 为状态的集合（可以为空集）

一开始定义 $0=\{|\}=\{\{\}|\{\}\}$ 为第 0 天出生的数字

第 1 天出生 $1=\{0|\}$ 和 $-1=\{|0\}$

大家都知道的部分

定义一个状态为 {L|R}，其中 L 和 R 为状态的集合（可以为空集）
一开始定义 0={|}={{}|{}} 为第 0 天出生的数字
第 1 天出生 1={0|} 和-1={|0}
第 2 天出生 2={1|}，-2={|-1}，1/2={0|1}，-1/2={-1|0}

大家都知道的部分

定义一个状态为 {L|R}，其中 L 和 R 为状态的集合（可以为空集）

一开始定义 0={|}={{}|{}} 为第 0 天出生的数字

第 1 天出生 1={0|} 和-1={|0}

第 2 天出生 2={1|}，-2={|-1}，1/2={0|1}，-1/2={-1|0}

以此类推

大家都知道的部分

对于一个状态 $\{L|R\}$，若 L 和 R 均为有限集，则 $\{L|R\}=\{\max(L)|\min(R)\}$

大家都知道的部分

对于一个状态 {L|R}，若 L 和 R 均为有限集，则
{L|R}={max(L)|min(R)}
(无限集的情况会比较麻烦比如 {0|1,1/2,1/4,1/8...} 既不是 0 也不是 {0|0})

大家都知道的部分

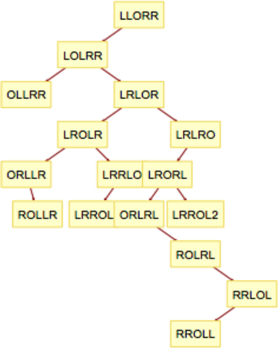
对于一个状态 {L|R}，若 L 和 R 均为有限集，则
{L|R}={max(L)|min(R)}
(无限集的情况会比较麻烦比如 {0|1,1/2,1/4,1/8...} 既不是 0 也不是 {0|0})
对于一个状态 {l|r} 且 $l < r$，{l|r}= 区间 (l,r) 内最早出生的数字
(容易看出只有一个)

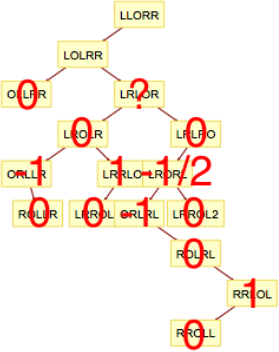
大家都知道的部分

对于一个状态 $\{L|R\}$，若 L 和 R 均为有限集，则 $\{L|R\}=\{\max(L)|\min(R)\}$
(无限集的情况会比较麻烦比如 $\{0|1,1/2,1/4,1/8...\}$ 既不是 0 也不是 $\{0|0\}$)
对于一个状态 $\{l|r\}$ 且 $l<r$，$\{l|r\}=$ 区间 (l,r) 内最早出生的数字
(容易看出只有一个)
用这些知识即可推导出 2-不可达点的结论。

那么 $\{0|0\}$ 怎么办?

那么 $\{0|0\}$ 怎么办?


LLORR
LOLRR
OLLRR
LRLOR
LROLR
LRLRO
ORLLR
LRRLO
LRORL
ROLLR
LRROL
ORLRL
LRROL2
ROLRL
RRLOL
RROLL


LLORR
LOLRR
0
?
0
0
-1
1
-1/2
0
0
-1
0
0
1
0

大家可能知道的部分

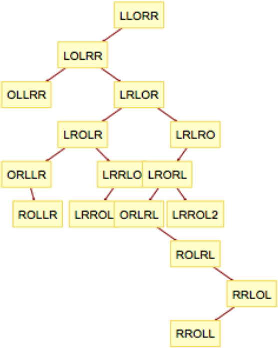
对于两个游戏 G=$\{G^L|G^R\}$,H=$\{H^L|H^R\}$
G+H=$\{G^L$+H,H^L+G$|G^R$+H,H^R+G$\}$

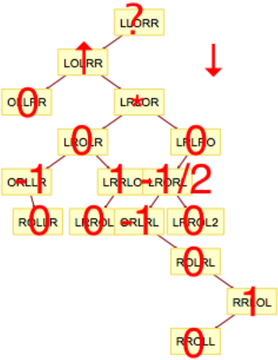
大家不太知道的部分

定义 $*=\{0|0\},\uparrow=\{0|*\},\downarrow=\{*|0\}$

大家不太知道的部分

定义 $*=\{0|0\},\uparrow=\{0|*\},\downarrow=\{*|0\}$





1-不可达点

容易看出 $*$ 小于任何一个正“数”（后面将使用“数”来表示大家都知道的部分的数字），大于任何一个负数，但是和 0“无法比较”

1-不可达点

容易看出 $*$ 小于任何一个正“数”(后面将使用“数”来表示大家都知道的部分的数字),大于任何一个负数,但是和 0“无法比较”
同时 $*+*=\{0+*|0+*\}=0$

1-不可达点

容易看出 $*$ 小于任何一个正“数”（后面将使用“数”来表示大家都知道的部分的数字），大于任何一个负数，但是和 0“无法比较”

同时 $*+*=\{0+*|0+*\}=0$

那么对于 1-不可达点的数据，只需要先判断-1,-1/2,0,1/2,1 的大小，当结果为 0 时判断 $*$ 的奇偶性即可。

$\uparrow$

容易看出 $\uparrow$ 本身是一个必胜态，即 $\uparrow$ 大于 0

↑

容易看出 ↑ 本身是一个必胜态，即 ↑ 大于 0
但是 ↑ 小于任何一个正数（$\uparrow+(-x)=\uparrow+\{-2x|0\}=\{-x,\uparrow-2x|*-x,0\}$ 必败）

$\uparrow$

容易看出 $\uparrow$ 本身是一个必胜态，即 $\uparrow$ 大于 0
但是 $\uparrow$ 小于任何一个正数（$\uparrow$+(-x)=$\uparrow$+{-2x|0}={-x,$\uparrow$-2x|$*$-x,0} 必败）
那么没有 $*$ 的数据（虽然没有这样的部分分）就可以直接通过-1,-1/2,0,1/2,1 等于 0 时判断 $\uparrow$ 和 $\downarrow$ 的数量关系算出。

$\uparrow *$

根据之前的分析只需要考虑 $*$ 为偶数且-1,-1/2,0,1/2,1 和为 0 的情况

$\uparrow *$

根据之前的分析只需要考虑 $*$ 为偶数且-1,-1/2,0,1/2,1 和为 0 的情况

$\uparrow + * = \{*, \uparrow | * + *, \uparrow\} = \{*, \uparrow | 0, \uparrow\} = \{*, \uparrow | 0\}$ 是一个先手必胜态

$\uparrow *$

根据之前的分析只需要考虑 $*$ 为偶数且-1,-1/2,0,1/2,1 和为 0 的情况

$\uparrow + * = \{*, \uparrow | * + *, \uparrow\} = \{*, \uparrow | 0, \uparrow\} = \{*, \uparrow | 0\}$ 是一个先手必胜态

（实际上它还等于 $\{*, 0 | 0\}$）

$\uparrow *$

根据之前的分析只需要考虑 $*$ 为偶数且-1,-1/2,0,1/2,1 和为 0 的情况

$\uparrow + * = \{*, \uparrow | * + *, \uparrow\} = \{*, \uparrow | 0, \uparrow\} = \{*, \uparrow | 0\}$ 是一个先手必胜态

(实际上它还等于 $\{*, 0 | 0\}$)

又 $\uparrow + \uparrow + * = \{\uparrow + *, \uparrow + \uparrow | \uparrow, \uparrow + \uparrow\} = \{\uparrow + \uparrow | \uparrow\}$ 故为必胜态

$\uparrow *$

根据之前的分析只需要考虑 $*$ 为偶数且-1,-1/2,0,1/2,1 和为 0 的情况

$\uparrow+*=\{*,\uparrow|*+*,\uparrow\}=\{*,\uparrow|0,\uparrow\}=\{*,\uparrow|0\}$ 是一个先手必胜态

(实际上它还等于 $\{*,0|0\}$)

又 $\uparrow+\uparrow+*=\{\uparrow+*,\uparrow+\uparrow|\uparrow,\uparrow+\uparrow\}=\{\uparrow+\uparrow|\uparrow\}$ 故为必胜态

那么只需要在 $\uparrow$ 的个数（减去 $\downarrow$ 之后的）在-1 到 1 之间时先手必胜，剩下的根据正负判断即可。

$\uparrow *$

根据之前的分析只需要考虑 $*$ 为偶数且-1,-1/2,0,1/2,1 和为 0 的情况

$\uparrow + * = \{*, \uparrow | * + *, \uparrow\} = \{*, \uparrow | 0, \uparrow\} = \{*, \uparrow | 0\}$ 是一个先手必胜态

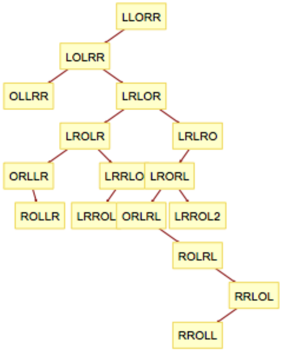
(实际上它还等于 $\{*, 0 | 0\}$)

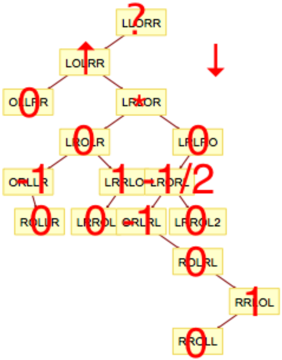
又 $\uparrow + \uparrow + * = \{\uparrow + *, \uparrow + \uparrow | \uparrow, \uparrow + \uparrow\} = \{\uparrow + \uparrow | \uparrow\}$ 故为必胜态

那么只需要在 $\uparrow$ 的个数（减去 $\downarrow$ 之后的）在-1 到 1 之间时先手必胜，剩下的根据正负判断即可。

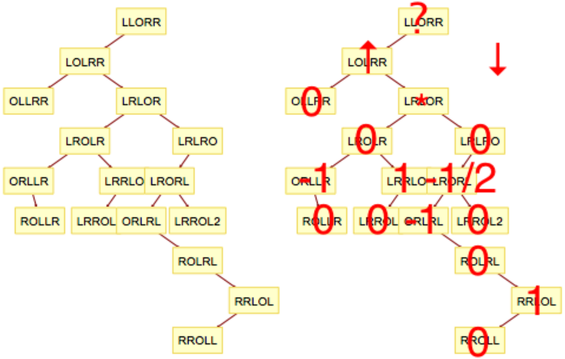
这样就解决了 0-不可达点的数据

LL_RR


LLORR
LOLRR
OLLRR
LRLOR
LROLR
LRLRO
ORLLR
LRRLO
LRORL
ROLLR
LRROL
ORLRL
LRROL2
ROLRL
RRLOL
RROLL



LL_RR



那么最后这个状态的值 $\{\uparrow|\downarrow\}$ 是什么呢?

$\{\uparrow|\downarrow\}$

$$\{\uparrow|\downarrow\}+*=\{\uparrow+*,\{\uparrow|\downarrow\}|\downarrow+*,\{\uparrow|\downarrow\}\}$$

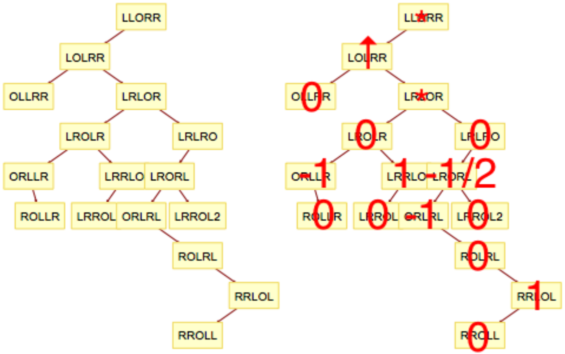
$\{\uparrow|\downarrow\}$

$\{\uparrow|\downarrow\}+*=\{\uparrow+*,\{\uparrow|\downarrow\}|\downarrow+*,\{\uparrow|\downarrow\}\}$
由于 $\{\uparrow|\downarrow\}$ 为先手必胜，所以这四个状态均为先手必胜状态，也就是说 $\{\uparrow|\downarrow\}+*=0$

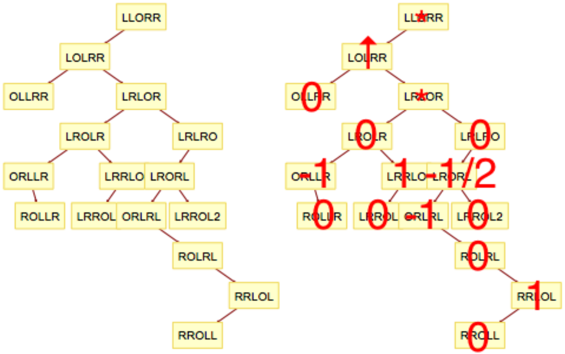
$\{\uparrow|\downarrow\}$

$\{\uparrow|\downarrow\}+*=\{\uparrow+*,\{\uparrow|\downarrow\}|\downarrow+*,\{\uparrow|\downarrow\}\}$
由于 $\{\uparrow|\downarrow\}$ 为先手必胜，所以这四个状态均为先手必胜状态，也就是说 $\{\uparrow|\downarrow\}+*=0$
即 $\{\uparrow|\downarrow\}=-*=*$

surreal numbers 续



surreal numbers 续



然后就做完辣!

由于时间有限，具体证明大家可以查阅 surreal numbers 相关资料

由于时间有限，具体证明大家可以查阅 surreal numbers 相关资料
之前的内容有一些只在本题限制下才满足，可能并不严谨。

Oh thank you sir