

相等树链

题目大意

给定 2 棵点集均为 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的树 T_1, T_2 。问有多少个点的非空子集，使得它在 T_1, T_2 上均为一条链。

一个点的子集 S 在 T_i 上为一条链，当且仅当存在 $1 \leq x \leq y \leq n$ ，在 T_i 上从 x 到 y 的最短路径经过的点集恰好为 S 。

数据范围

对于所有数据， $1 \leq n \leq 2 \times 10^5$ 。

Subtask #1 (10 分): $n \leq 5000$ 。

Subtask #2 (20 分): T_1, T_2 中每个点的度数均不超过 2。

Subtask #3 (30 分): T_1, T_2 中每个点的度数均不超过 3。

Subtask #4 (40 分): 无特殊性质。

时间限制: 6s

空间限制: 1GB

解题过程

记 $P_i(x, y)$ 为 T_i 上从 x 到 y 的最短路径经过的点集。

我们对 T_1 进行点分治，设当前分治中心为 u 。假设 S 满足：

- $|S| \geq 2$
- $u \in S$
- S 在 T_1, T_2 上均对应一条链

假设 $S = P_1(x, y) = P_2(z, w)$ 。记 $S_x = P_1(x, u) \setminus \{u\}, S_y = P_1(y, u) \setminus \{u\}$ 。那么有

$$\begin{aligned} u &\notin S_x, S_y \\ S_x \cap S_y &= \emptyset \\ S &= \{u\} \cup S_x \cup S_y \end{aligned}$$

由于 $S_x \subset P_2(z, w)$ ，必然存在 $a_1 \dots a_k$ 满足：

$$\begin{aligned} 0 &\leq k \leq 2 \\ a_i &\in S_x \\ S_x &\subseteq \bigcup P_2(a_i, u) \setminus \{u\} \\ k < 2 &\vee P_2(a_1, u) \cap P_2(a_2, u) = \{u\} \end{aligned}$$

同理，对 S_y 也存在 $b_1 \dots l$ 满足上述性质。

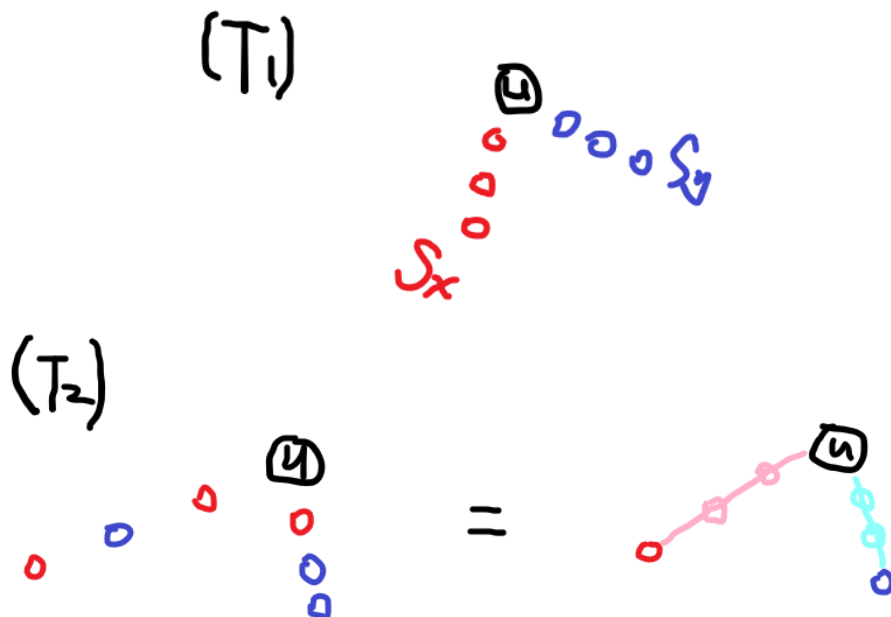
我们对 z, w 所属的集合进行讨论：

当 $z, w \in S_x \cup \{u\}$ 时， $S_x \oplus S_y = \bigoplus P_2(a_i, u) \setminus \{u\}$ 。

当 $z, w \in S_y \cup \{u\}$ 时， $S_x \oplus S_y = \bigoplus P_2(b_j, u) \setminus \{u\}$ 。

当 $z \in S_x, w \in S_y$ 时，存在唯一的 i, j 满足 $S_x \oplus S_y = P_2(a_i, u) \oplus P_2(b_j, u)$ 。

(第 3 种情况的图)



将每种情况的等式分别移项得到：

$$\begin{aligned} S_x \oplus \bigoplus P_2(a_i, u) \setminus \{u\} &= S_y \\ S_x &= S_y \oplus \bigoplus P_2(b_j, u) \setminus \{u\} \\ S_x \oplus P_2(a_i, u) &= S_y \oplus P_2(b_j, u) \end{aligned}$$

那么，等式左边只和 x 有关，等式右边只和 y 有关。

因此，问题可以转化成：对于每种情况，分别求出每个点 v 作为 x, y 时可能产生的集合 $F_x(v), F_y(v)$ (注意在第 3 种情况中， $F_{x/y}(v)$ 可能有 2 种取值)，然后计算有多少对 (v_1, v_2) 满足：

- $u \in P_1(v_1, v_2)$
- $F_x(v_1) = F_y(v_2)$

考虑依次遍历 T_1 上 u 的每个子树，同时维护数据结构，每次先查询一些集合的出现次数，再加入一些集合。可以用平衡树维护集合的哈希值，总时间复杂度为 $O(n \log^2 n)$ 。

我们需要分析，何时 S 不合法却仍被算入答案。

当 $z, w \in S_x \cup \{u\}$ 时，对于指定的 x 可以唯一确定合法的 S_y ，因此不会出错。

当 $z \in S_x, w \in S_y$ 时，等式可推出 $S = \{u\} \oplus P_2(a_i, u) \oplus P_2(b_j, u)$ 。设 $c(v)$ 为 T_2 上 u 到 v 最短路径上的第 2 个点，若 $c(a_i) = c(b_j)$ 则 S 在 T_2 上不能形成链。因此，我们把元素按照 $c(a_i/b_j)$ 分组，对每组再做一遍上述算法即可去除不合法情况。

总结

本题强于排列连续段计数，做法强烈依赖分治结构以及链的性质。本题思路新颖，然而代码实现细节较多。