

树与染色!

题意简述

一棵以1为根的树，一共 n 个节点，每一个节点都有颜色，初始时颜色编号都为 1。

一共进行 m 次操作，操作有两种：

- `1 x y`：把以 x 为根的子树的全部节点染成 y 号颜色。
- `2 x`：询问把连接不同颜色的点的边删掉后， x 所在的连通块大小。边不实际删掉。

数据范围

对于所有数据， $1 \leq n \leq 10^6$ ， $1 \leq m \leq 10^6$ ， $1 \leq y \leq n$ 。

测试点编号	$n \leq$	$m \leq$	特殊性质
1~6	10^5	10^6	$n \times m \leq 10^8$
7~10	10^5	10^5	无
11~12	10^6	10^6	点 i 的父亲在 $[1, i - 1]$ 以内随机生成 (点1除外)
13~14	5×10^5	5×10^5	无
15	10^6	10^6	点 i 的父亲是 $i - 1$ (点1除外)
16~20	10^6	10^6	无

解题过程

做法1

染色的时候遍历子树染色，查询的时候暴力深搜查询。

时间复杂度 $O(nm)$ ，能过子任务一。

期望得分 30 pts。

做法2

第五个子任务是一条链，处理的方法非常多。

用数组模拟栈，存不同颜色的分界点。每个点的颜色通过数组上二分查找获得。

染色的时候会弹出一段后缀，再添加 $0 \sim 1$ 个分界点，把该后缀染成了指定颜色。

查询的时候在数组上二分，获得该点前后的分界点，获得连通块大小。

时间复杂度 $O(n + m \log n)$ 。

结合做法1期望得分 35 pts。

做法3

使用重链剖分。我们令点 x 在子树内的同色连通块大小为 $f[x]$ ， x 的父亲结点编号为 $father[x]$ ， x 的子树大小为 $siz[x]$ 。

染色时其实就是进行了一个子树覆盖和链修改。该子树内，对于每个 x 结点的后代结点 y ， $f[y]$ 都赋值为 y 的子树大小。然后找到距离根最近的结点 z ，满足 z 是 x 的祖先且 z 的颜色和 $father[x]$ 的颜色相同。再讨论染色前以及染色后 x 与 $father[x]$ 是否颜色相等来决定 $father[x]$ 到 z 的路径上所有点的 f 修改情况。令 t 等于染色前的 $f[x]$ ，若染色前相等则 f 减少 t ，若染色后相等则 f 增加 $siz[x]$ ，二者叠加。

维护点的颜色可以用经典的懒标记线段树。

查询结点 x 的时候，找到距离根最近的结点 z ，满足 z 是 x 的祖先且 z 的颜色和 x 的颜色相同，也就是这个同色连通块的最顶点，单点查询 $f[z]$ 并输出。

时间复杂度 $O(n + m \log^2 n)$ ，复杂度瓶颈在链修改，如果树高是 $O(\log n)$ 的话（子任务三）就是 $O(n + m \log n)$ 。

子任务二就是留给诸如此类的 $O(n + m \log^2 n)$ 做法以及根号做法的。

结合做法1做法2期望得分 65+ pts。

做法4

我们也可以换个方向思考，令总的同色连通块个数为 cnt 。

每次染色操作只能让 cnt 增加不超过 1。

我们用动态树 LCT 维护同色连通块，每次染色暴力地把子树内的所有同色连通块连到一起，然后根据是否同色考虑是否断开父边。该 LCT 需要维护子树信息。

再另外用一个（一些）数据结构维护点的颜色、快速查找子树内连通块的根，比如 dfs 序 + set。

每当连接了两个连通块的时候， cnt 就会减少1，总连接次数是 $O(m)$ 的。

总时间复杂度 $O(n + m \log n)$ 。

常数较大，结合做法2期望得分 75~100 pts。

做法5

考虑在做法3的基础上改进。

我们不用重链剖分，而只是将点按照 dfs 序拍到线段树上。

做法3虽然要链修改，但是只需要单点查询。所以我们树上差分，维护差分数组 $f'[x]$ ， $f[x]$ 就等于 x 子树内所有后代结点 y 的 $f'[y]$ 之和。初始时所有结点 $f' = 1$ 。

令点 x 所在的同色连通块顶端（即距离根最近的结点 z ，满足 z 是 x 的祖先且 z 的颜色和 x 的颜色相同）为 $tp[x]$ ，容易发现，每次染色子树 x 时只有子树内后代结点 y 的 $tp[y]$ 会变化，且将统一赋值为 x 或统一赋值为 $tp[father[x]]$ 。我们用维护点颜色相同的方法维护 tp 就行。

染色操作怎么维护 f' 呢？令 t 等于染色前的 $f[x]$ ，用覆盖懒标记的方式使得所有子树内的 $f'[y] = 1$ 。此时 x 的所有祖先 z 的 $f[z]$ 都会增加 $siz[x] - t$ ，于是将 $f'[father[x]]$ 增加 $t - siz[x]$ 以抵消影响。然后进行差分后的链修改，讨论与做法3相同。

时间复杂度 $O(n + m \log n)$ 。

期望得分 100 pts。

参考资料

[1]. [Link Cut Tree - OI Wiki #维护子树信息](#)