托卡马克（tokamak）解析

算法 1

首先可以将问题考虑为 $2n$ 个点的满足条件的完美匹配，将方案数除以 $(2n-1)(2n-3)\cdots 1$ 即为概率，考虑 DP 设 $f_{i,j}$ 表示前 i 个点有 j 个向后连边的，此时对前面匹配规划的方案数。任意列出递推式

$$f_{i,j} = f_{i-1,j-1} + (j+1)f_{i-1,j+1}$$

其中限制 $j < k$，$f_{2n,0}$ 即为答案。复杂度 $\Theta(nk)$。

算法 2

考虑把这个过程看做一个树的入栈出栈序列，那么可以得到子树的 DP 式子：

$$\begin{aligned} f_{k-1}(x) &= 1 \\ f_{j-1}(x) &= \frac{1}{1 - jxf_j(x)} \end{aligned}$$

关于 n 的 GF 即为 $f_0(x)$。

设 $f_j = \frac{A}{B}$，那么有

$$\begin{aligned} f_{j-1}(x) &= \frac{1}{1 - jxf_j(x)} \\ &= \frac{B}{-jxA + B} \end{aligned}$$

因此只需计算矩阵乘积

$$\left(\prod_{j=1}^{k-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -jx & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即得到 A, B，然后多项式求逆即可。

分治 FFT 对其计算，复杂度约为 $\Theta(k\log^2 k + n\log n)$。

算法 3

考虑进行容斥。我们先考虑朴素 DP 中容斥掉走到 $j = k+1$ 位置的次数，那么就分为以下三步：

- 首先 $0 \to k$
- 进行若干次 $k \to k$
- 最后 $k \to 0$

考虑用微分方程改写原先的 DP 式子，就有

$$f_i(x) = f'_{i-1}(x) + xf_{i-1}(x)$$

我们设 $f_i(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}g_i(x)$，就有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}g_i(x)&=(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}g_{i-1}(x))'+x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}g_{i-1}(x)\\&=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}g'_{i-1}(x)\\g_i(x)&=g'_{i-1}(x)\end{aligned}$$

那么我们就可以得到各步骤的方案数了，考虑对所有的 n，计算 $[x^k]f^{(n)}(x)g(x)$:

$$\begin{aligned}&=\sum_j([x^j]f^{(n)}(x))[x^{k-j}]g(x)\\&=\sum_j f_{n+j}\frac{(n+j)!}{j!}g_{k-j}\\&=\sum_j f_{n+j}(n+j)!\cdot\frac{g_{k-j}}{j!}\end{aligned}$$

可以通过卷积实现，因此我们设三个阶段的 GF 为 A,B,C，求出 $[x^n]\frac{AC}{B}$ 即可。复杂度 $\Theta(n\log n)$。

但其实我们发现 $A_n=\binom{2n-k}{k}(2n-2k-1)!!,C_n=k!A_n$，但是最后求逆还是得 FFT，所以有没有看出来问题不大。

算法 4

这是另解。我们考虑直接搞出算法 1 的这个递推矩阵的特征多项式。

$$f_k(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & & & \\ -1 & \lambda & -2 & & \\ & -1 & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -(k-1)\\ & & & -1 & \lambda\end{vmatrix}$$

对着左下角展开，得到递推式

$$\begin{aligned}f_k(\lambda)&=\lambda f_{k-1}(\lambda)-(k-1)f_{k-2}(\lambda)\\\frac{f_k}{(k-1)!}&=\lambda\frac{f_{k-1}}{(k-1)!}-\frac{f_{k-2}}{(k-2)!}\end{aligned}$$

令 $g_k=f_k/k!$，再设二元 GF $G=\sum_k g_kt^k$，就有

$$
\begin{aligned}
kg_k &= \lambda g_{k-1} - g_{k-2} \\
tG' &= \lambda t G - t^2 G \\
\frac{G'}{G} &= \lambda - t \\
\ln G &= \lambda t - \frac{1}{2}t^2 \\
G &= \exp\left(\lambda t - \frac{1}{2}t^2\right) \\
&= \sum_{i,j}\left(-\frac{1}{2}\right)^j \frac{\lambda^i t^{i+2j}}{i!j!} \\
g_k &= \sum_j \left(-\frac{1}{2}\right)^j \frac{\lambda^{k-2j}}{j!(k-2j)!} \\
f_k &= \sum_j (-1)^j \frac{(2j)!}{j!2^j}\binom{k}{2j}\lambda^{k-2j} \\
&= \sum_j (-1)^j (2j-1)!!\binom{k}{2j}\lambda^{k-2j}
\end{aligned}
$$

当然这也有组合解释：提取 λ 的对应幂次的时候，我们可以知道总共取了多少个“$k-1$”的项，组合意义就是有 j 个匹配，剩下的是孤点。那么就先选出 $\binom{k}{2j}$ 个点用来匹配，乘以 $(2j-1)!!$ 即可。

然后基于多项式求逆和 FFT 就可以 $\Theta(n \log n)$ 了。