

《不是这一道据数构结题》命题报告

重庆市巴蜀中学 冯政玮

2023 年 10 月 30 日

目录

1	题意简述	2
2	数据范围与限制	3
3	解题过程	4
3.1	算法 1	4
3.2	算法 2	4
3.3	算法 3	5
3.4	算法 4	5
3.5	算法 5	5
4	致谢	6
5	参考文献	6

1 题意简述

给定一个长度为 n 的序列 a , q 次询问, 每次询问一个区间 $[l, r]$ 的权值 $f(a_{l \sim r})$ 。

$f(A)$ 定义为: 执行 m 轮操作, 非空的轮数。

具体的, 令 A 数组长度为 m , 则执行 m 轮操作。

第 i 轮从 i 开始, 依次检查 A_i 与 $A_{i+1} \sim A_m$ 的大小关系, 设当前检查 A_i 与 A_t 的大小关系, 若 $A_i < A_t$ 则交换 A_i 与 A_t , 若第 i 轮进行了至少一次交换, 称这一轮非空。

具体的, 以 $f([1, 4, 2, 3])$ 为例, 每一轮操作之后, 数组分别为 $[4, 1, 2, 3], [4, 3, 1, 2], [4, 3, 2, 1], [4, 3, 2, 1]$, 前 3 轮是非空的, 所以 $f([1, 4, 2, 3]) = 3$ 。

注意, f 函数对原数组 a 不造成任何实质上的影响, 仅用于计算权值。

2 数据范围与限制

对于所有的数据，满足 $1 \leq n, q \leq 10^6, 1 \leq a_i \leq n$ 。

时间限制 $2000ms$ ，空间限制 $1024MB$ 。

测试点编号	n, q	是否 a 形如排列
1 ~ 1	≤ 100	是
2 ~ 2	≤ 100	否
3 ~ 5	≤ 3000	是
6 ~ 8	≤ 3000	否
9 ~ 10	≤ 10000	是
11 ~ 12	≤ 10000	否
13 ~ 13	≤ 200000	是
14 ~ 16	≤ 200000	否
17 ~ 17	≤ 1000000	是
18 ~ 20	≤ 1000000	否

3 解题过程

3.1 算法 1

最朴素的暴力处理方式：直接对于每组询问暴力的枚举求解，复杂度 $O(qn^2)$ ，可以通过 $n, q \leq 100$ 。

3.2 算法 2

考虑当前尝试解决如下问题：对于仅求定区间 $[l, r]$ 的权值。

注意到，对于单个区间的权值也不是容易的，且不易发现多个区间权值之间的继承关系，我们先考虑排列的情况。

观察当前计算 f 权值的过程，可以描述为存在一个指针，对 i 而言验证后续数的大小与 A_i 大小的关系，然后尝试进行交换，我们观察一个权值的移动比如 $a_i = t$ ，观察 t 元素的移动过程。

注意到， t 元素在求解 f 权值过程中，会向后移动，注意到，在整个过程中 t 会经过顺次经过所有空，然后停止移动，空满足位置不小于 t 的初始位置且这个空的元素的初始大小不小于 t 。

这是易于说明的，因为对于这样的空，在一轮 swap 之后，要么 t 会来到这个空，要么这个空的元素仍大于 t 。

定义轮空为非空的反面。

我们尝试计算轮空的次数，若当前修改后的 A_i 是后缀最值，则当前这轮轮空，考虑元素 A_i ，定义其产生轮空为存在一轮，以 A_i 元素开头，且其为后缀最值。

注意到若其会产生轮空，可以描述为， A_i 元素能去到的最靠后的位置之前不存在比 A_i 小的元素。

这也是易于说明的，当 A_i 去到最靠后的位置时才能作为后缀最值，如果这个位置之前存在比 A_i 小的元素，则 A_i 不能作为一轮的开头。

此时我们可以增量法求解权值 $f(a_{l \sim r})$ ，具体的，枚举 l 之后，顺序枚举 r 记录元素之后更小元素与更大元素，复杂度 $O(n^2 + q)$ 。

考虑扩展到非排列的情况，类似的，我们观察权值相同的所有元素的移动过程，注意到，此时的移动形如这些元素最终会同步向右 shift 到不小于当前元素大小的空中。

此时对于权值相同的等于 t 的所有元素，我们仍相似的记录其轮空的贡献。

具体的记长度为 u 的序列 x_i 为满足 $A_{x_i} = t$ 的下标序列，记长度为 v 的序列 y_i 为满足 $A_{y_i} \geq t$ 的下标序列。

可视为初始位置在 x_i 位置的元素停止移动之前最终移动到了 y_{v-u+i} ，然后与排列相同的处理，复杂度 $O(n^2 + q)$ ，可以通过 $n, q \leq 3000$ 。

3.3 算法 3

考虑如何处理更多的询问，我们注意到，我们可以处理末尾增量的情况，这提示我们尝试用莫队的想法进行处理，注意到贡献并不是方便回撤的，我们考虑回滚莫队。

考虑前端加入的情况，注意到，回滚之后只会有 \sqrt{n} 个前缀元素加入，我们讨论前缀加入的影响。

对于每个权值影响是明确的，讨论其在前缀 \sqrt{n} 个中是否出现（可以用主席树重算），是否前缀有比其小的元素（可以树状数组查询）

直接实现可以做到 $O(n\sqrt{n}\log n)$ ，可以通过 $n, q \leq 10000$ 。

3.4 算法 4

经过仔细分析，你注意到对于每一块的 \sqrt{n} 个元素是相同的，可以统一处理重算，而树状数组的 \log 也可以通过若干次离线与 $O(\sqrt{n}) - O(1)$ 的分块平衡处理实现。

通过精细实现可以做到 $O(n\sqrt{n})$ ，可以通过 $n, q \leq 200000$ 。

同时这一档部分分也留给常数过大或者复杂度稍劣的下一个算法。

3.5 算法 5

我们仍考虑贡献，倒序扫描线，我们考虑一个元素会在什么区间计算到贡献，扫描 1 时，对于元素 a_i 会被计算到贡献形如 r 会小于一个确定的范围。

比如排列我们可以描述为对于当前元素 t 之后第一个小于 t 的 pos 之后不能存在大于 t 的元素，排列直接记录即可。

考虑序列，仍考虑同步 shift 的过程，仍考虑一个区间中上述 x, y 集合的对应关系，这个元素不能产生贡献当 r 超过 pos 之后的 k 个可达空。

这里 pos 是当前元素之后第一个小于 t 元素的位置，可达空是定义为当前元素可能去到的空， k 定义为当前这个权值的可产生贡献元素个数。

当然，排列和序列都需要考虑加入 a_i 对后续元素的前缀 \min 的影响。

这个可以不用线段树二分实现，可以用 ST 表，然后在上进行倍增处理，会减小一定常数。复杂度 $O(n\log n)$ ，可以通过所有测试点。

4 致谢

感谢集训队员马未然，李铭乐洋，学长郭雨豪，罗思远为本题验题。

5 参考文献

无。