

题目大意

给定一张 n 个点 m 条边的图，保证 $m - n$ 较小，求出其每对点间的最短路之和。

数据范围

$n \leq 10^5$, $m - n \leq 1000$ 。

解题过程

首先将所有一度点删掉，计算连接它那条边的贡献，并将边另一端的点上的点权加一。点权表示这个点是由多少个点缩合而来的。

之后找出所有度数大于二的点，由于边数的限制，其点数不超过 2000。注意如果不存在这样的点，要任选至少一个点。

将图缩小为只有这些点的图，其边数不超过 3000，可以跑一遍全源最短路。

这时图里的一条边（可以是自环）是实际上的一条链。考虑两条链之间的贡献。

设第一条链的两端是 a, b ，第二条链是 c, d ，长度分别为 l_1, l_2 。那么某个第一条链的结点 u 到第二条链的结点 v 的最短路就可以被拆成 $u \rightarrow a, b \rightarrow c, d \rightarrow v$ 。

考虑枚举 u ，我们可以 $O(1)$ 得知 $dis(u, c)$ 和 $dis(u, d)$ 。维护对于从 c 到 d 的结点 v 到 u 的最短路经过 c 还是经过 d 的分界点 p 。

p 的移动是 $O(l_1 + l_2)$ 的。分别考虑 $dis(u, c)$ 和 $dis(u, d)$ 经过的是 a 还是 b 。如果其情况没有变化，那么一定是一个减少而另一个增加， p 只会向一个方向移动。其情况有变化的次数是 $O(1)$ 的，因此我们做到了线性时间求得两条链的答案。

设 $c = m - n$ ，那么复杂度是 $O(c^2 \log c + cn)$ 。

参考资料

[广义串并联图方法学习笔记 - LPE](#)

其它

刻意卡掉了带 $O(cn \log n)$ 一项的做法，如果没卡掉就算子，然后可能也卡掉了常数大一些的算法（例如点数不是 $2c$ 而是 $4c$ 的），这个很对不起。

在出完这道题后，我发现本题解题过程极其类似广义串并联图，已经被前人总结过了（见参考资料），但经过一些交流发现其似乎并没有特别普及，因此仍选择将此题出出来。

此外，我个人认为此题数据并不需要 20 个测试点来保证强度。

我与集训队成员黄洛天、精英培训成员张程浩、李青阳、傅九瑞交流过该题目。