题目大意

给定一棵 n 个点的树。

- 称点集 S **连通**，当且仅当 $\forall u, v \in S$，所有 u 到 v 的简单路径上的点均在 S 中。
- 称点集 S 是 $[l, r]$ 的**虹**，当且仅当 S **连通**，且 S 包含 $[l, r]$ 中的所有点。
- 称点集 S_0 是 $[l, r]$ 的**最小虹**，当且仅当 S_0 是 $[l, r]$ 的所有**虹**中大小最小的集合。可以证明，S_0 是唯一的。

点带权，点 u 的权值为 w_u。初始所有点权均为 0。同时，给定序列 $\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$。

给定 q 次命令，每次命令形如以下两类之一：

- `1 l r`：令 S_0 为 $[l, r]$ 的**最小虹**，$\forall u \in S_0$，将 w_u 加 1。
- `2 l r u`：求 $(\sum_{i=l}^{r} 19901991^{z_{\gcd(i,u)} w_i}) \bmod 20242024$ 的值。

数据范围

对于所有测试数据保证，$1 \le n, q \le 8 \times 10^4, 0 \le z_i \le 10^9$，所有命令满足 $1 \le l \le r \le n, 1 \le u \le n$，**保证第一类命令的 (l, r) 随机生成**。随机生成方式如下：

- 在 $[1, n] \cap \mathbb{Z}$ 中等概率随机生成 l。
- 在 $[1, n] \cap \mathbb{Z}$ 中等概率随机生成 r。
- 若 $l > r$，则交换 l, r。

子任务编号	分值	$n \le$	$q \le$	特殊性质
1	10	10^3	10^3	无
2	20	65536	65536	A, B
3	20	65536	65536	A
4	30	65536	65536	无
5	20	80000	80000	无

特殊性质 A：保证所有第二类命令均在所有第一类命令之后。

特殊性质 B：保证第二类命令次数 ≤ 20。

解题过程

Part 1

注意到 $19901991^2 \equiv 1 \pmod{20242024}$。令 c 为满足 $i \in [l, r], z_{\gcd(i,u)} \equiv w_i \equiv 1 \pmod 2$ 的 i 数量，则答案为 $(19901991c + r - l + 1 - c) \bmod 20242024$。

考虑 bitset。假设已知 $\{w_1 \bmod 2, w_2 \bmod 2, \cdots, w_n \bmod 2\}$ 及 $\{z_{\gcd(1,u)} \bmod 2, z_{\gcd(2,u)} \bmod 2, \cdots, z_{\gcd(n,u)} \bmod 2\}$ 对应的 bitset（不妨称作 W, Z），通过按位与、popcount 即可算出 c。关键在于如何维护 W, Z。

Part 2

加一在模 2 意义下等价于取反。那么，只要对每个 (l,r) 求出了 S_0，则容易通过按位异或，递推出所有的 W。

令 t 为 $l,l+1,\cdots,r$ 的 LCA 的父节点，P_u 为 t 到根路径对应的点集，$S_0'=P_l\cup P_{l+1}\cup\cdots\cup P_r$，则 $S_0=\complement_{S_0'}P_t$。使用类似 ST 表的结构容易算出 t。考虑如何计算 S_0'。

考虑分块，令块长为 B，当块长较小时，由于第一类命令的 (l,r) 随机，几乎所有 $[l,r]$ 满足 l,r 属于不同块。我们将 $[l,r]$ 拆成三部分，即某个块的后缀，若干个连续的块，和某个块的前缀。先考虑如何计算：某个块的前缀对应的 P 的并。我们枚举每个块，从前往后加入每个点，维护前缀各 P 的并；每当加入新点时，我们从新加入的点往上跳，若 bitset 在该处已经是 1 则结束，否则将其设为 1 并继续往上跳。另两部分同理。通过均摊分析，时间复杂度 $O(\frac{n^2}{B})$。

此外，每对 (l,r) 有 $O(\frac{B}{n})$ 的概率属于同一块，此时暴力 $O(n)$ 求出 S_0，时间复杂度 $O(qB)$。

令 $B=\frac{n}{\sqrt{q}}$，本部分复杂度 $O(n\sqrt{q}+\frac{nq}{\omega})$。

Part 3

考虑如何求 Z。

考虑直接暴力。离线下来，从小到大爆搜 u 所有质因子及幂次，在此过程中维护 $\gcd(1,u),\gcd(2,u),\cdots,\gcd(n,u)$ 及 Z。

乍一看复杂度很不对，但实际上跑得飞快。写个程序算一下，发现当 $n=80000$ 时最多更新 43474197 次。

本部分复杂度 $O(X+\frac{nq}{\omega})$，其中 X 表示更新次数 $(X\le 43474197)$。

总复杂度 $O(n\sqrt{q}+X+\frac{nq}{\omega})$，可以通过本题。