

性别改造计划

清华大学 计算机系 魏铭

mwei.cs@gmail.com

题目大意

- 给定分层无向图G，每个结点有初始颜色黑/白
- 两种边：
 - 层内边，边连接的两个结点异色，有权值b
 - 层间边，以“链”的形式贯穿层与层，每条链同色
- 可付出一定代价修改结点颜色，根据修改后颜色变化，层内边权值将产生变化：
 - 若双方颜色不变，权值仍为b
 - 若双方颜色互换，权值变为 $\text{floor}(b*d)$
 - 否则权值为0
- 最大化 $\text{floor}(10\ln(1+A))*S-C$, A为层间链中相邻两者异色的情况数量，S为层内边权值和，C为结点修改代价之和

Solution

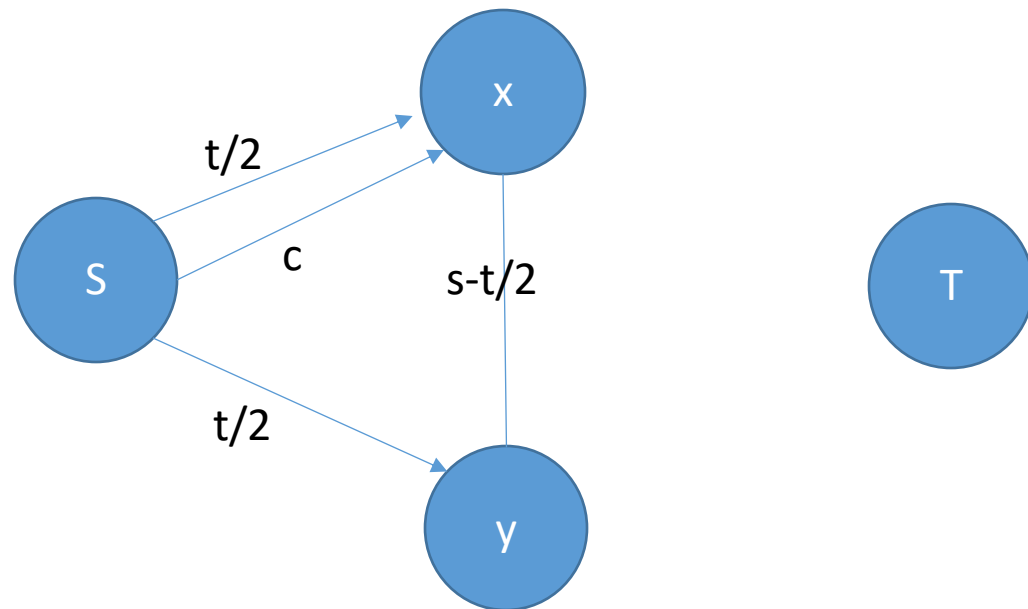
- 首先确定每个结点*i*所在的层数 $l[i]$ ，每条血缘链中结点的层数为 $1\sim n$ ，其他结点的层数可根据繁衍关系得到
- 无法确定所在层数的结点可任意设置 $l[i]$ ，最优解中这些结点的颜色一定不会改变
- Why?
- $\text{floor}(10\ln(1+A))*S-C$:
 - 这些孤立结点的颜色不会影响A
 - 为使S尽量大，结点颜色应尽量不变
 - 为使C尽量小，结点颜色应尽量不变
- 于是孤立结点的颜色均不变

Solution

- 枚举A后动态规划
- $F[n][mask][count]$ 表示：考虑前n层结点带来的代价，第n层的血缘链上结点颜色状态为mask，且血缘链中相邻异性的数量为count时的最大收益。
- $n: 1 \sim N$
- $mask: 0 \sim 2^k - 1$
- $count: 0 \sim NK$

Solution

- 如何计算出每层的最优解？
- 网络流
- 对于边 (x, y, b, d) :
 - x 与 y 性别不变: $s=b$
 - x 与 y 性别互换: $s=\text{floor}(b*d)$
 - 其他情况为0
- 源集合 S : 未改变性别的结点集合
- 汇集合 T : 改变性别的结点集合



记 $t=b-\text{floor}(b*d)$, 即性别互换与性别不互换之间的收益差

1. 互换性别则造成 t 的收益损失
2. 有一方换性别, 另一方不换, 则造成 s 的收益损失

对边 (x, y) :
S到 x , S到 y 建立容量 $t/2$ 的边
 x 到 y 建立容量为 $s-t/2$ 的边

对点 x , 建立S到 x 容量为 c 的边

对于已经确定性别的点 x
应根据性别情况建立S到 x 或 x 到T之间的无穷大边

时间复杂度

- 外层枚举A: NK
- 状态总数: $N \cdot 2^k \cdot NK$
- 转移复杂度: $2^k + \text{maxflow}$
- 总复杂度 $N^3 K^2 2^k (2^k + \text{maxflow})$

- 一点优化:
- 枚举 $\text{floor}(10 \ln(1+A))$ 而不是枚举A