IOI'2011中国国家队选拔赛
CCF CTSC 2011

北京大学　钟诚

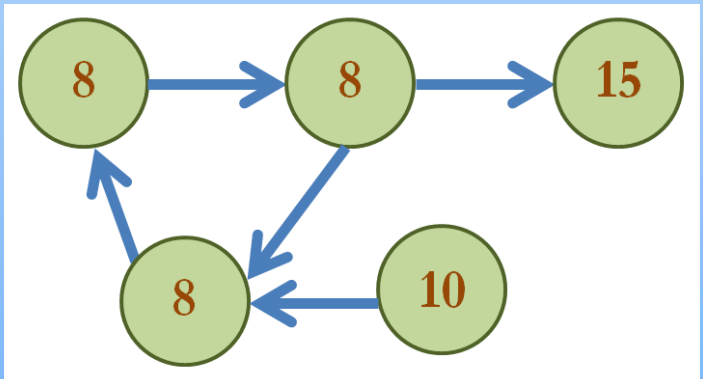
2011年5月3日下午

于中国人民大学

幸福路径——题目大意

- 一个有向图，每个点都有一个权值。蚂蚁从某点出发旅行。每走一步，所有点的权值都会同时乘一个系数$\varrho(<1)$。求无穷多步后，所经过点的权值和的最大值。
- 右图中，若$\varrho=1/2$，则最大值为：

$$10+8/2+8/4+8/8+8/16+8/32+8/64+\ldots$$
$$=10+8=18$$



分数分布

- 集训队员：（平均73.2）

100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
9	0	1	1	1	0	7	0	0	0	0

- 精英赛选手：（平均30.6）

100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
10	5	1	4	0	3	31	10	22	16	32

精英赛满分选手

高胜寒、 杨 洋、 廖彤亮、 梁 盾、

张 放、 李浩然、 徐 捷、 高 远、

冯迭乔、 李 超

讨论时间

幸福路径——朴素思路

- 记$f[st,ed,day]$表示以st为起点、ed为终点，经过day天幸福度的最大值。则有动态规划方程：

$$f[st,ed,day] = w[st] + \rho * \max_{(st,i)\in E} f[i,ed,day-1]$$

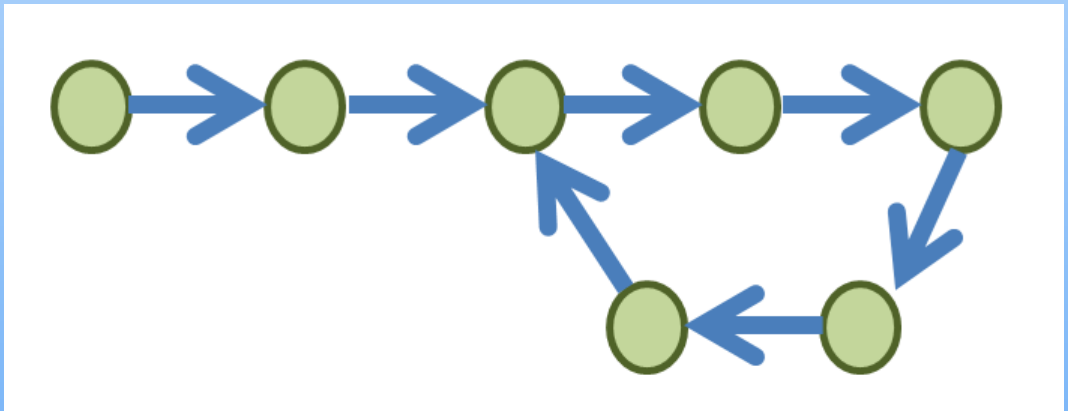
- 直接以

$$\max_{day\in \boldsymbol{N}^*,1\le ed\le n} f[v_0,ed,day]$$

作为答案。

幸福路径——重要结论

- 由于步数无穷多，于是本题有很强的最优子结构性质。因此，在最优解中，每个点的后继是唯一的。
- 于是，最优解的路线必然如下所示：包含一条链和一个无穷循环的环。



幸福路径——朴素思路优化

- 根据这个重要结论，在*day*充分大时求

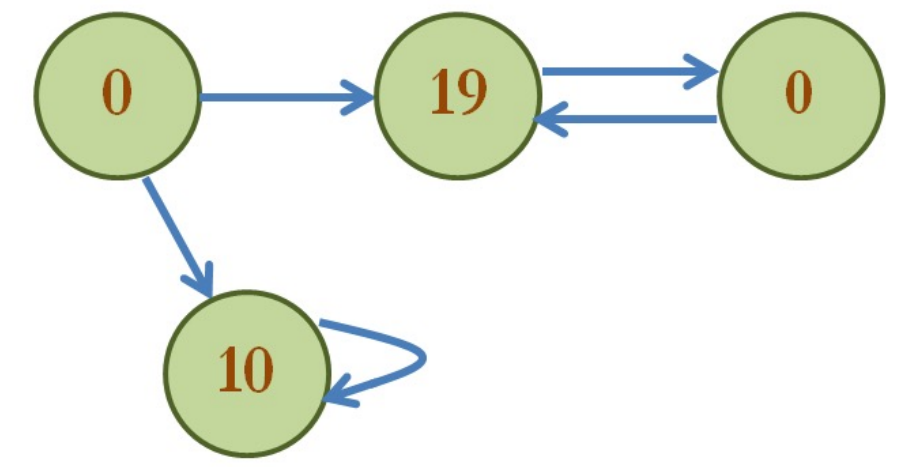
$$\max_{day \in \boldsymbol{N}^*, 1 \le ed \le n} f[v_0, ed, day]$$

并保存其取到最大值时的路径，求出链和环。

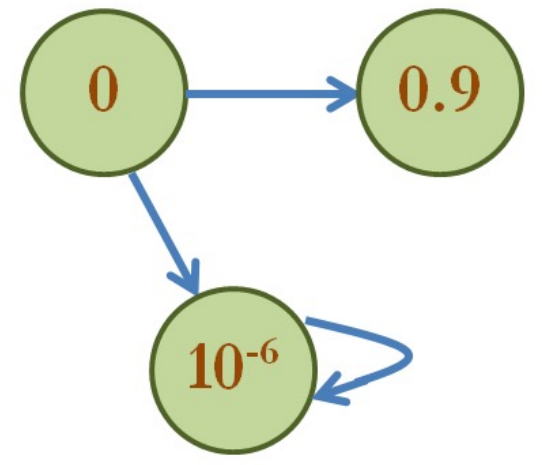
- 然后再根据等比级数求和公式，计算出幸福度的最大值。

幸福路径——朴素思路反例

- 当$\varrho=0.9$时



- 当$\varrho=0.999999$时



幸福路径——解题思路一(1/2)

- 第一步，计算只有环时，权值和的最大值。
- 记$f[st,ed,day]$表示以st为起点、ed为终点，经过day天幸福度的最大值。则有动态规划方程：

$$f[st,ed,day] = w[st] + \rho * \max_{(st,i)\in E} f[i,ed,day-1]$$

- 于是，

$$\max_{1\le day\le n,\,(x,y)\in E} \frac{f[y,x,day]}{1-\rho^{day}}$$

即为所求。

幸福路径——解题思路一(2/2)

- 第二步，根据已经计算出来的环，求给定起点出发的最大权值和。
- 记$g[st,day]$表示以st为起点，进入环之前（即链上）有day天。动态规划方程如下：

$$g[st,day] = w[st] + \rho * \max_{(st,i)\in E} g[i,day-1]$$

- 最后，

$$\max_{0\le day\le n-1} g[v_0,day]$$

即为所求。

幸福路径——解题思路二(I/I)

- 记$f[st, ed, t]$表示以st为起点、ed为终点，经过2^t天幸福度的最大值。

$$f[st, ed, t+1] = \max_{(x,y)\in E} f[st, x, t] + \rho^{2^t} * f[y, ed, t]$$

- 只要t足够大，

$$\max_{t\in \boldsymbol{N}^*, 1\le ed\le n} f[v_0, ed, t]$$

就是要求的最大值。

谢谢